

Modèles bifluïdes

Vincent Le Chenadec

MFT-3-1-2 2021/2022

Modélisation des écoulements diphasiques

On oppose souvent

1. Les modèles à un fluide et
2. Les modèles à deux fluides, ou *bifluides*

dans la modélisation des écoulements diphasiques

Modèles à un fluide

- ▶ La plupart du temps utilisée dans la limite incompressible et isotherme, sans changement de phase
- ▶ Ces modèles enrichissent les équations de Navier-Stokes

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \\ \rho [\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}] = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_{\text{vol}} \end{cases}$$

par l'ajout de

- ▶ Une fraction volume χ , dont l'évolution est régie par

$$\partial_t \chi + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \chi = 0;$$

- ▶ Une force interfaciale (\mathbf{f}_{surf}) ;
- ▶ Équations d'état pour les densités et viscosités effectives, telles que

$$\rho = \chi \rho_1 + (1 - \chi) \rho_2$$

- ▶ (Voir cours de M. Vincent.)

Modèle bifluide

- ▶ Dans ces modèles, chaque phase possède ces propres équations d'évolution
- ▶ On augmente ces systèmes de **termes d'échanges** (matière, de QdM et d'énergie) et d'une fraction volumique
- ▶ La fermeture de ces termes ainsi que de l'équation de transport de la fraction volumique repose elle aussi sur la thermodynamique hors-équilibre
- ▶ Ces modèles, le plus souvent compressibles, s'appliquent aussi bien à des topologies de phases séparées et de phases dispersées

$$\forall \alpha \in \llbracket 1, 2 \rrbracket,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t (\chi_\alpha \rho_\alpha) + \nabla \cdot (\chi_\alpha \rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha) = \Gamma_\alpha, \\ \partial_t (\chi_\alpha \rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha) + \nabla \cdot (\chi_\alpha \rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha \otimes \mathbf{u}_\alpha) = -\nabla (\chi_\alpha p_\alpha) + \mathbf{M}_\alpha, \\ \partial_t (\chi_\alpha \rho_\alpha E_\alpha) + \nabla \cdot (\chi_\alpha \rho_\alpha E_\alpha \mathbf{u}_\alpha) = -\nabla \cdot (\chi_\alpha \mathbf{u}_\alpha p_\alpha) + \Pi_\alpha \end{array} \right.$$

- Ces équations font apparaître les termes d'échange suivants ($\alpha \in \llbracket 1, 2 \rrbracket$)

1. Matière

$$\Gamma_\alpha$$

2. Quantité de mouvement

$$\mathbf{M}_\alpha = \Gamma_\alpha \mathbf{u}_\alpha^* + p_\alpha^* \nabla \chi_\alpha + \mathbf{M}_\alpha^d,$$

3. D'énergie

$$\Pi_\alpha = \Gamma_\alpha \Pi_\alpha^* + \mathbf{M}_\alpha^d \cdot \mathbf{u}_\alpha^* + p_\alpha^* \mathbf{u}_\alpha^* \nabla \chi_\alpha + \Pi_\alpha^d$$

- ▶ (Les termes visqueux, ainsi que les effets diffusifs de type Fourier, Fick, Soret ou Dufour ont été omis même peuvent bien sûr être ajoutés.)
- ▶ Le nombre de ces équations peuvent être réduites en fonctions des équilibres présents

- ▶ Thermique

$$T^\alpha = T^\beta$$

- ▶ Chimique

$$\mu^\alpha = \mu^\beta$$

- ▶ Cinématique

$$\mathbf{u}^\alpha = \mathbf{u}^\beta$$

- ▶ Mécanique

$$p^\alpha = p^\beta$$

- ▶ Les lois de conservation imposent

$$\sum_{\alpha} \Gamma_{\alpha} = 0, \quad \sum_{\alpha} \mathbf{M}_{\alpha} = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{\alpha} \Pi_{\alpha} = 0$$

- ▶ La condition de saturation (fluides immiscibles) donne

$$\sum_{\alpha} \chi_{\alpha} = 1$$

- ▶ Les termes d'échange, ou **flux**, sont exprimés en fonction de quantités supplémentaires

$$\forall \alpha \in \llbracket 1, 2 \rrbracket, \quad \mathbf{u}_{\alpha}^*, p_{\alpha}^*, E_{\alpha}^*$$

- ▶ Ces grandeurs sont associées à l'état de chaque fluide au voisinage de l'interface
- ▶ La **force** associée aux échanges de masse est la différence de potentiel chimique

$$\forall \alpha \in \llbracket 1, 2 \rrbracket, \quad \Gamma_{\alpha} = \mathcal{K} \left(\mu^{\beta} - \mu^{\alpha} \right), \quad \alpha + \beta = 3$$

où $\mathcal{K} \geq 0$ (coefficient de transfert de matière)

► De la même manière,

$$\forall \alpha \in \llbracket 1, 2 \rrbracket, \quad \mathbf{M}_\alpha^d = \mathcal{D} \left(\mathbf{u}^\beta - \mathbf{u}^\alpha \right), \quad \alpha + \beta = 3$$

où $\mathcal{D} \geq 0$ (coefficient de trainée)

► et

$$\forall \alpha \in \llbracket 1, 2 \rrbracket, \quad \Pi_\alpha^d = \mathcal{H} \left(T^\beta - T^\alpha \right), \quad \alpha + \beta = 3$$

où $\mathcal{H} \geq 0$ (coefficient de transfert de chaleur)

- ▶ En l'absence de tension de surface, les pressions interfaciales sont égales

$$p_1^* = p_2^* = p^*$$

- ▶ De même, on suppose

$$\mathbf{u}_1^* = \mathbf{u}_2^* = \mathbf{u}^*$$

- ▶ Jusqu'ici, en dépit de ces fermetures, il manque encore l'équation sur la fraction

Cela peut se faire

- ▶ En supposant que l'équilibre thermodynamique est atteint, elle est définie implicitement par une relation de type (ici écrite pour des fluides barotropes)

$$p_1 \left(\frac{\bar{\rho}_1}{\chi_1} \right) = p_2 \left(\frac{\bar{\rho}_2}{1 - \chi_1} \right)$$

où $\bar{\rho}_\alpha \triangleq \chi_\alpha \rho_\alpha$ est une variable primaire du système ;

- ▶ En écrivant une nouvelle équation de transport

$$\partial_t \chi_\alpha + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla) \chi_\alpha = \mathcal{S}_\alpha$$

où

$$\mathcal{S}_\alpha = \mathcal{T} (p_\alpha - p_\beta), \quad \alpha + \beta = 3$$

et $\mathcal{T} \geq 0$

- ▶ Le modèle bifluide le plus général, proposé par Baer & Nunziato, comporte donc 7 équations
- ▶ À l'équilibre chimique (sans transferts de matière entre les phases), le système s'écrit $\forall \alpha \in \llbracket 1, 2 \rrbracket$,

$$\partial_t (\chi_\alpha \rho_\alpha) + \partial_x (\chi_\alpha \rho_\alpha u_\alpha) = 0,$$

$$\partial_t (\chi_\alpha \rho_\alpha u_\alpha) + \partial_x \left[\chi_\alpha \left(\rho_\alpha u_\alpha^2 + p_\alpha \right) \right] = p^* \partial_x \chi_\alpha + \mathcal{D} (u_\beta - u_\alpha),$$

$$\partial_t (\chi_\alpha \rho_\alpha E_\alpha) + \partial_x \left[\chi_\alpha \left(\rho_\alpha E_\alpha + p_\alpha \right) u_\alpha \right] = p^* u^* \partial_x \chi_\alpha + u^* \mathcal{D} (u_\beta - u_\alpha) + p^* \mathcal{T} (p_\beta - p_\alpha),$$

où $\alpha + \beta = 3$

- ▶ Ces équations sont complétées par une équation pour le transport de la fraction volumique (une seule, soit $\alpha = 1$ ou 2 suffit)

$$\partial_t \chi_\alpha + u^* \partial_x \chi_\alpha = \mathcal{T} (p_\alpha - p_\beta)$$

- Le modèle bifluide peut s'écrire sous la forme générique

$$\partial_t \mathbf{Q} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{Q}) + \mathbf{B}(\mathbf{Q}) \partial_x \mathbf{Q} = \mathbf{S}(\mathbf{Q})$$

où la variable primitive et la fonction flux sont définies par

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_1 \rho_1 \\ \chi_1 \rho_1 u_1 \\ \chi_1 \rho_1 E_1 \\ \chi_2 \rho_2 \\ \chi_2 \rho_2 u_2 \\ \chi_2 \rho_2 E_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{F}(\mathbf{Q}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_1 \rho_1 u_1 \\ \chi_1 (\rho_1 u_1^2 + p_1) \\ \chi_1 (\rho_1 E_1 + p_1) u_1 \\ \chi_2 \rho_2 u_2 \\ \chi_2 (\rho_2 u_2^2 + p_2) \\ \chi_2 (\rho_2 E_2 + p_2) u_2 \end{pmatrix}.$$

- ▶ Le terme non-conservatif s'écrit

$$\mathbf{B}(\mathbf{Q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}(\mathbf{Q}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

où

$$\mathbf{C}(\mathbf{Q}) = \begin{pmatrix} u^* \\ 0 \\ -p^* \\ -p^* u^* \\ 0 \\ p^* \\ p^* u^* \end{pmatrix}$$

- Enfin dans le cas particulier où $\mathcal{H} = 0$ et en l'absence de changement de phase, le terme source s'écrit

$$\mathbf{S}(\mathbf{Q}) = \begin{pmatrix} \mathcal{T}(p_1 - p_2) \\ 0 \\ \mathcal{D}(u_2 - u_1) \\ u^* \mathcal{D}(u_2 - u_1) + p^* \mathcal{T}(p_2 - p_1) \\ 0 \\ \mathcal{D}(u_1 - u_2) \\ u^* \mathcal{D}(u_1 - u_2) + p^* \mathcal{T}(p_1 - p_2) \end{pmatrix}$$

$$\partial_t \mathbf{Q} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{Q}) + \mathbf{B}(\mathbf{Q}) \partial_x \mathbf{Q} = \mathbf{S}(\mathbf{Q})$$

- ▶ Ce modèle n'a pas de forme conservative, ce qui pose un problème du point de vue de sa résolution numérique (conditions de Rankine-Hugoniot?)
- ▶ Une bonne nouvelle cependant : la vitesse interfaciale (u^*) n'apparaît ni dans la variable \mathbf{Q} , ni dans la fonction flux $\mathbf{F}(\mathbf{Q})$, ce qui simplifie l'analyse des propriétés du système

- ▶ On peut montrer que les valeurs propres de la matrice jacobienne

$$\mathbf{F}'(\mathbf{Q}) + \mathbf{B}(\mathbf{Q})$$

sont toujours réelles

- ▶ Ces valeurs propres sont

$$u^* \begin{array}{ccc} u_1 - c_1 & u_1 & u_1 + c_1 \\ u_2 - c_2 & u_2 & u_2 + c_2 \end{array}$$

- ▶ Dans les cas où $u^* \neq u_1 \pm c_1$ et $u^* \neq u_2 \pm c_2$, on montre que les champs associés aux valeurs propres
 - ▶ u_α sont **linéairement dégénérés** ;
 - ▶ $u_\alpha \pm c_\alpha$ sont **vraiment non linéaires**.

- ▶ Il est souvent souhaitable d'associer à la valeur propre u^* un champ linéairement dégénéré
- ▶ On montre que cette propriété est satisfaite lorsque

$$u^* = \omega u_1 + (1 - \omega) u_2$$

où

$$\omega = \frac{\psi \chi_1 \rho_1}{\psi \chi_1 \rho_1 + (1 - \psi) \chi_2 \rho_2}$$

et $\psi \in [0, 1]$

- ▶ Pour fermer le système, il reste à spécifier p^*
- ▶ On peut montrer que

$$\begin{aligned} \partial_t \left(\sum_{\alpha} \chi_{\alpha} \rho_{\alpha} s_{\alpha} \right) + \partial_x \left(\sum_{\alpha} \chi_{\alpha} \rho_{\alpha} s_{\alpha} u_{\alpha} \right) = \\ \sum_{\alpha} \frac{1}{T_{\alpha}} (p^* - p_{\alpha}) (u^* - u_{\alpha}) \partial_x \chi_{\alpha} \\ + \sum_{\alpha} \frac{1}{T_{\alpha}} [\mathcal{D} (u_{\beta} - u_{\alpha}) (u^* - u_{\alpha}) + \mathcal{T} (p_{\beta} - p_{\alpha}) (p^* - p_{\alpha})] \end{aligned}$$

- ▶ Si comme pour la vitesse, on souhaite écrire la pression interfaciale comme une combinaison convexe des pressions de chaque phase,

$$p^* = \mu p_1 + (1 - \mu) p_2,$$

on montre alors que la dernière ligne de l'équation précédente peut s'écrire

$$\left(\frac{1 - \omega}{T_1} + \frac{\omega}{T_2} \right) \mathcal{D} (u_2 - u_1)^2 + \left(\frac{1 - \mu}{T_1} + \frac{\mu}{T_2} \right) \mathcal{T} (p_2 - p_1)^2 \geq 0$$

qui est donc une quantité signée

- ▶ L'idée est alors d'annuler le premier terme, à savoir

$$\sum_{\alpha} \frac{1}{T_{\alpha}} (p^* - p_{\alpha}) (u^* - u_{\alpha}) \partial_x \chi_{\alpha}$$

ce qui est réalisé en imposant

$$\mu = \frac{(1 - \omega) T_2}{\omega T_1 + (1 - \omega) T_2}$$

Pour aller plus loin

Qu'est ce qui fait un bon modèle ?

1. Consistence thermodynamique ;
2. **Problème bien posé mathématiquement** ;
3. Pas de dissipation excessive (petites structures. . .).

$$A\partial_{xx}u + 2B\partial_{xy}u + C\partial_{yy}u + D\partial_xu + E\partial_yu + Fu + G = 0$$

► Discriminant

$$B^2 - AC$$

- $\Delta > 0$: équations hyperboliques ;
- $\Delta = 0$: équations paraboliques ;
- $\Delta < 0$: équations elliptiques.