Équations de Navier-Stokes

1 Écoulement de Couette plan

On considère l'écoulement d'un fluide newtonien incompressible entre un plan infini inférieur ($y = 0$) fixe et un plan infini supérieur ($y = a$) qui se déplace parallèlement à lui-même à une vitesse constante U_0.

On suppose qu'aucun gradient de pression extérieur n'est appliqué et que l'écoulement est laminaire et stationnaire, et enfin que les plans sont horizontaux.

Dans la situation étudiée ici, les propriétés de l'écoulement sont invariantes par translation suivant x et z

Déterminer le profil de vitesse, $y \mapsto U(y)$.

2 Écoulement de Poiseuille plan

On considère un fluide visqueux et incompressible en écoulement permanent entre deux plans infinis situés en $y = -b/2$ et $y = b/2$. L'écoulement, qui est considéré parallèle, est induit par une différence de pression Δp appliquée entre les deux extrémités des plans distants de L. Dans la situation étudiée ici, les propriétés de l'écoulement ne dépendent pas de z, et on considère donc le problème bidimensionnel.

1. En considérant le gradient de pression horizontal constant le long de l'écoulement, déterminer
$$\frac{\partial p}{\partial x}.$$
2. Déterminer le profil de vitesse.
3. Déterminer la vitesse moyenne de l'écoulement.

3 Amortisseur hydraulique

On considère le dispositif constitué d'un cylindre solide fixe, de rayon intérieur R et d'un piston mobile, de longueur L ménageant un jeu radial e supposé très petit devant R. La chambre comprise entre le fond du cylindre et le piston est remplie d'une huile incompressible, de viscosité dynamique μ dont on négligera le poids. Sous l'action d'une force axiale de module F, le piston se translate à une vitesse U constante en expulsant un débit de fluide par la couronne périphérique.

On suppose le régime permanent et on assimile le mouvement du fluide entre piston et cylindre à celui entre deux plans parallèles en se ramenant à un problème bidimensionnel tel qu'il est représenté sur l'agrandissement de la figure 1 (le jeu est supposé suffisamment faible pour négliger les effets de courbure). Il règne une différence de pression $\Delta P = F/\pi R^2$ entre les deux extrémités du piston.

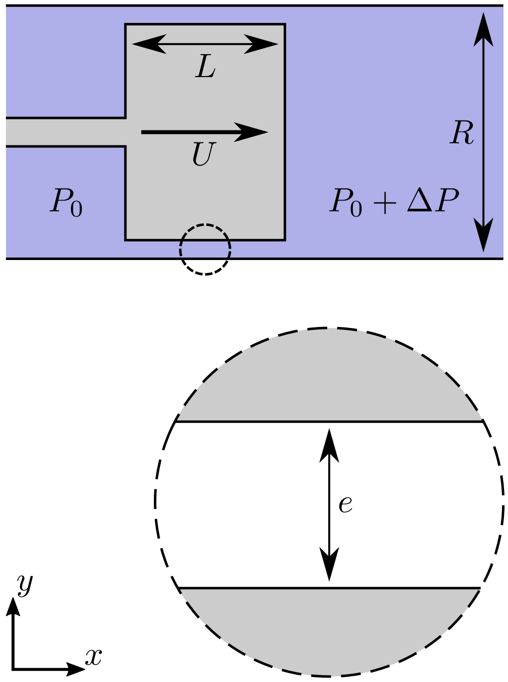

Figure 1: Amortisseur hydraulique

Le but de ce problème est d'établir l'expression de la vitesse de déplacement du piston en fonction de la force appliquée.

1. En supposant le gradient de pression horizontal
$$\frac{\partial p}{\partial x}$$
constant entre les deux extrémités du piston, donner son expression en fonction de ΔP et L puis en fonction de F, R et L.
2. À partir de la géométrie du problème (en tenant compte des simplifications de l'énoncé) et de l'équation de continuité, indiquer les simplifications possibles du vecteur vitesse $\vec{v}$ du fluide entre les deux plans ainsi que les variables dont il dépend.
3. Écrire, simplifier et intégrer l'équation de Navier-Stokes pour déterminer le profil de vitesse du fluide entre les deux plans en fonction de F, μ, R, L, e et U.
4. Représenter graphiquement l'allure de ce profil.
5. En intégrant ce profil sur l'épaisseur e, déterminer le débit volumique Q de fluide dans la couronne.
6. En écrivant l'égalité entre Q dans la couronne et le débit de fluide déplacé par le piston, établir l'expression de la vitesse de déplacement du piston U en fonction de la force appliquée F, des paramètres géométriques R, L, e et de la viscosité du fluide μ.

4 Écoulement par ruissellement laminaire

Sur une plaque plane lisse faisant avec l'horizontale un angle α, en mouvement permanent bidimensionnel établi et sous une épaisseur a, coule sous l'effet de la pesanteur un liquide de densité ρ et de viscosité dynamique μ.

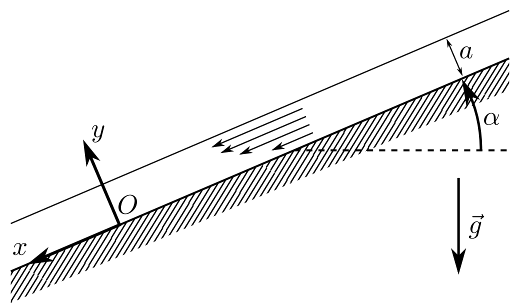

Figure 2: Écoulement par ruissellement laminaire

Le fluide est soumis à la pesanteur ($\vec{g}$). Les champs de vitesse et de pression sont sujets aux conditions aux limites suivantes : sur la plaque ($y = 0$),

$$\begin{cases} u\,(x, 0) = 0, \\ v\,(x, 0) = 0, \end{cases}$$

et sur la surface libre ($y = a$),

$$\begin{cases} v\,(x, a) = 0, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{(x,a)} = 0, \\ P\,(x, a) = P_{\text{atm}}. \end{cases}$$

On cherche à déterminer le débit volumique par unité de largeur par la résolution des équations de Navier – Stokes :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ \rho\dfrac{\partial u}{\partial t} + \rho u\dfrac{\partial u}{\partial x} + \rho v\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial P}{\partial x} + \mu\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \rho g \sin\alpha, \\ \rho\dfrac{\partial v}{\partial t} + \rho u\dfrac{\partial v}{\partial x} + \rho v\dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{\partial P}{\partial y} + \mu\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) - \rho g \cos\alpha. \end{cases}$$

Il s'agit de l'équation de la continuité, et des composantes x et y de l'équation de conservation de la quantité de mouvement (QdM).

1. Le problème est stationnaire, et le champs de vitesse est indépendant de x, c'est à dire que $P\,(x, y)$, $u\,(y)$ et $v\,(y)$. Simplifier les équations en conséquence.
2. En utilisant l'équation de la continuité simplifiée à la question 1 et les conditions aux limites sur v, montrer que $v\,(y) = 0$.
3. Utiliser ce résultat afin de simplifier les composantes x et y de l'équation de conservation de la QdM déjà simplifiée à la question 1.
4. En utilisant la composante y de l'équation de la QdM simplifiée, montrer que

   $$P\,(x, y) = -\rho g y \cos\alpha + f\,(x)$$

   et déterminer $f\,(x)$ grâce à la condition $P\,(x, a) = P_{\text{atm}}$.
5. Utiliser le fait que P ne dépend pas de x pour simplifier la composante x de la conservation de la QdM (déjà simplifiée à la question 3).
6. Résoudre cette équation en appliquant les conditions aux limites sur u.
7. En déduire le débit volumique par unité de largeur.

5 Viscosimètre de Couette

Le viscosimètre de Couette est constitué de deux cylindres coaxiaux en rotation. Le cylindre intérieur de rayon R_i tourne à la vitesse angulaire Ω_i et le cylindre extérieur de rayon R_e tourne à la vitesse angulaire Ω_e. Le fluide contenu entre les deux cylindres est un fluide newtonien, incompressible, de viscosité dynamique μ constante et de masse volumique ρ, également constante. Aucun gradient de pression n'est appliqué suivant l'axe z entre l'entrée et la sortie de l'espace annulaire.

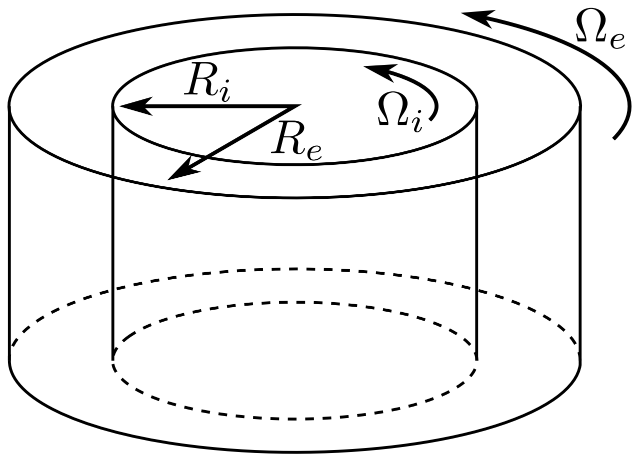

Figure 3: Viscosimètre de Couette

Par commodité, on travaille en coordonnées cylindriques. On donne ci-dessous les équations de conservation générales dans ce système de coordonnées. L'objectif de cet exercice est de déterminer le profil de vitesse

$$\vec{V}: \ (r,\theta,z) \mapsto (V_r(r,\theta,z), V_\theta(r,\theta,z), V_z(r,\theta,z))$$

de l'écoulement permanent dans cette géométrie, sachant que les symétries du problème imposent que $\vec{V}$ soit invariant par translation le long de l'axe z et par rotation autour de ce même axe.

1. D'après les symétries du problème, de quelles variables indépendantes (r, θ ou z) $\vec{V}$ est-il fonction ?
2. Écrire les conditions aux limites en $r = R_i$ et $r = R_e$ pour V_r, V_θ et V_z.
3. À partir de l'équation de continuité (donnée ci-dessous), montrer que la composante radiale de la vitesse (V_r) est nulle.
4. En prenant en compte toutes les hypothèses du problème et les résultats des questions précédentes, et en admettant que
$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0,$$
simplifier les équations de Navier-Stokes données ci-dessous.
5. En déduite que V_z est nulle.
6. Déterminer la composante azimuthale de la vitesse (V_θ) en fonction de R_i, R_e, Ω_i, Ω_e et r.

Indication : en coordonnées cylindrique, l'équation de continuité s'écrit

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(rV_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0.$$

et en ce qui concerne les équations de Navier-Stokes

$$\rho\left(\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta} + V_z\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{V_\theta^2}{r}\right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu\left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{V_r}{r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}\right),$$

$$\rho\left(\frac{\partial V_\theta}{\partial t}+V_r\frac{\partial V_\theta}{\partial r}+\frac{V_rV_\theta}{r}+\frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}+V_z\frac{\partial V_\theta}{\partial z}\right)=-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}+\mu\left(\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial r}-\frac{V_\theta}{r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial z^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial V_r}{\partial \theta}\right)$$

et enfin

$$\rho\left(\frac{\partial V_z}{\partial t}+V_r\frac{\partial V_z}{\partial r}+\frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \theta}+V_z\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}\right).$$