03/05/2021

TD Méca Flu

$\boxed{\text{Les équations de Naviers-Stokes}}$

Ce sont des Équations aux Dérivées Partielles (plus d'une variable indépendante) : (x,y), (t,x), (t,x,y), (t,x,y,z) ... qui régissent la dynamique d'un écoulement fluide.

Dans la limite incompressible, ces équations s'écrivent :

$$\begin{cases} \rho \left[\dfrac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \underbrace{(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}}_{\text{(III)}} \right] = \underbrace{-\vec{\nabla} p}_{\text{(I)}} + \underbrace{\mu \Delta \vec{u}}_{\text{(IV)}} + \rho \vec{g} & \text{QdM} \ \left(2^{\text{ème}} \text{ loi de Newton, PFD}\right) \\ \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0}_{\text{(II)}} & \text{Continuité} \ \left(\text{conservation de la masse}\right) \end{cases}$$

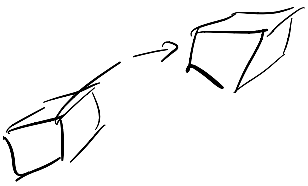
$\boxed{\rho, \mu \text{ constantes}}$

L'équation de la continuité dans la limite incompressible est une simplification de l'équation suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\rho}_{\frac{D\rho}{Dt} = 0} + \rho\, \vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0$$

"variation de la masse volumique d'une particule fluide"



$$\frac{d}{dt}\left(\frac{M}{V_{mat}}\right)$$

M = constante (volume matériel)

V_{mat} = constante (particule incompressible)

$$\Rightarrow \quad \rho\, \vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0$$

L'opérateur $\vec{\nabla}$ permet d'écrire ces équations indépendamment du système de coordonnées.

En coordonnées cartésiennes :

(I) $$\vec{\nabla} p = \vec{\mathrm{grad}}(p) = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{y,z} \\ \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{x,z} \\ \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_{x,y} \end{pmatrix}$$ GRADIENT

(II) $$\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = \vec{\nabla}\cdot\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)_{y,z} + \left(\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)_{x,z} + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)_{x,y}$$ DIVERGENCE

(III)

$$(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

(IV)

$$\Delta\vec{u} = (\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial^2 z} \\ \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$ LAPLACIEN

1 Écoulement de Couette plan

On considère l'écoulement d'un fluide newtonien incompressible entre un plan infini inférieur $(y = 0)$ fixe et un plan infini supérieur $(y = a)$ qui se déplace parallèlement à lui-même à une vitesse constante U_0.

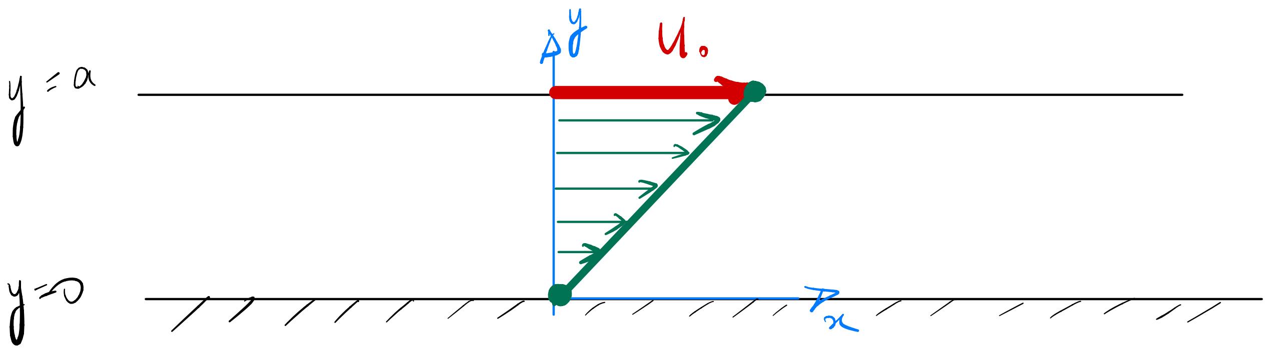
On suppose qu'aucun gradient de pression extérieur n'est appliqué et que l'écoulement est laminaire et stationnaire, et enfin que les plans sont horizontaux.

$\partial/\partial t = 0$

Dans la situation étudiée ici, les propriétés de l'écoulement sont invariantes par translation suivant x et z

Déterminer le profil de vitesse, $y \mapsto U(y)$.

$\partial/\partial x = 0$ $\frac{\partial}{\partial z} = 0$



N.S. en 2D en coordonnées cartésiennes

$$\rho\left(\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}\right) + \rho g_x$$

$$\rho\left(\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_y}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}\right) + \rho g_y$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0$$

Les termes surlignés sont nuls par hypothèse :

$$\rho u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \qquad (1)$$

$$\rho u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \rho g \qquad (2)$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \qquad (3)$$

$$\begin{pmatrix} u_x(y) \\ u_y(y) \\ p(y) \end{pmatrix}$$

Or Eq.(3) nous dit que $\left(\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)_x = 0$

$\Rightarrow u_y$ ne dépend pas de y.

$\Rightarrow u_y$ est une constante

$$u_y(y) = u_y(0) = u_y(a)$$

Or les plaques en $y = 0$ et $y = a$ sont imperméables :

$$u_y(0) = u_y(a) = 0.$$

On en déduit que $u_y = 0$.

On peut donc simplifier les équations (1) et (2) :

$$0 = \mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g$$

On obtient donc deux équations indépendantes.

La seule variable indépendante est x : on peut remplacer les dérivées partielles par des dérivées droites :

$$\begin{cases} 0 = \mu \dfrac{d^2 u_x}{dy^2} \\ 0 = -\dfrac{dp}{dy} + \rho g \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \mu u_x''(y) & (1bis) \\ 0 = -p'(y) + \rho g & (2bis) \end{cases} \quad \text{E.D.O.}$$

Résolution de (1 bis) :

$$\mu u_x''(y) = 0 \Rightarrow u_x''(y) = 0$$

$$\Rightarrow u_x'(y) = A$$

$$\Rightarrow u_x(y) = Ay + B$$

Il faut identifier les constantes A et B.

$\Rightarrow$ grâce aux conditions aux limites $u_x(0) = 0$ et $u_x(a) = u_0$.

$u_x(0) = 0 \Rightarrow A \times 0 + B = 0 \Rightarrow B = 0$

$u_x(a) = U_0 \Rightarrow A a + B = U_0 \Rightarrow A = \frac{U_0}{a}$.

On en déduit : $\boxed{u_x(y) = U_0 \frac{y}{a}}$.

On peut aussi intégrer (2bis).

$$p(y) = \rho g y + C$$

indéterminée dans la limite incompressible

c.à.d que le champs de pression est déterminé à une constante près.

2 Écoulement de Poiseuille plan

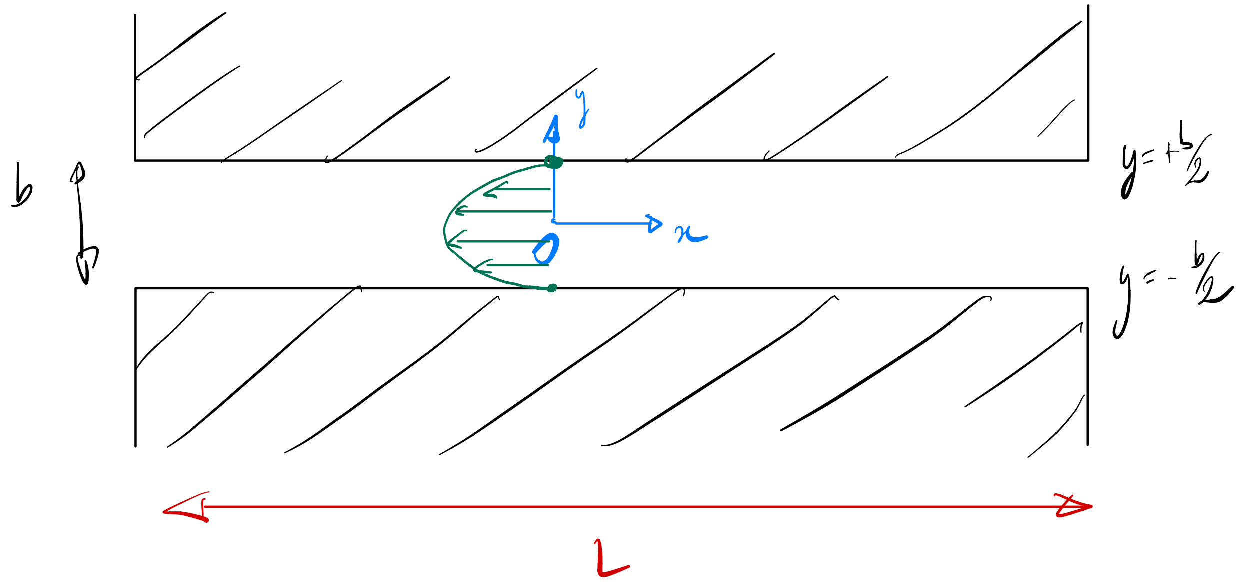
$u_y = 0$

On considère un fluide visqueux et incompressible en écoulement permanent entre deux plans infinis situés en $y = -b/2$ et $y = b/2$. L'écoulement, qui est considéré parallèle, est induit par une différence de pression Δp appliquée entre les deux extrémités des plans distants de L. Dans la situation étudiée ici, les propriétés de l'écoulement ne dépendent pas de z, et on considère donc le problème bidimensionnel.

1. En considérant le gradient de pression horizontal constant le long de l'écoulement, déterminer

$$\frac{\partial p}{\partial x}.$$

2. Déterminer le profil de vitesse.
3. Déterminer la vitesse moyenne de l'écoulement.



N.S. en 2D (x, y, t).

① Si $\frac{\partial p}{\partial x}$ est constant, $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\Delta p}{L}$.

②

$$\rho\left(\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) = -\underbrace{\frac{\partial p}{\partial x}}_{=\frac{\Delta p}{L}} + \mu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}\right) + \rho g_x$$

$$\rho\left(\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_y}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}\right) + \rho g_y$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0$$

$$\rho\, u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) \quad (1)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g \quad (2)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

$$(1) \Rightarrow u_x(\cancel{x}, y) = u_x(y).$$

$\Rightarrow \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}$ dans (1) est nul.

On obtient donc :

$$0 = -\frac{\Delta p}{L} + \mu \frac{d^2 u_x}{dy^2} \quad (1\text{ bis})$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g. \quad (2\text{ bis}).$$

Résolution du (1bis) :

$$0 = -\frac{\Delta p}{L} + \mu \frac{d^2 u_x}{dy^2}$$

$$\Leftrightarrow \mu \frac{d^2 u_x}{dy^2} = \frac{\Delta p}{L}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2 u_x}{dy^2} = \frac{\Delta p}{\mu L}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d u_x}{dy} = \frac{\Delta p}{\mu L} y + A$$

$$\Leftrightarrow \boxed{u_x(y) = \frac{\Delta p}{2\mu L} y^2 + Ay + B}$$

Il reste à déterminer les 2 constantes A et B. Ici aussi, on utilise les conditions aux limites :

$$u_x\left(-\frac{b}{2}\right) = u_x\left(+\frac{b}{2}\right) = 0$$

$$\begin{cases} u_x\left(-\frac{b}{2}\right) = \frac{\Delta p}{2\mu L}\left(-\frac{b}{2}\right)^2 - \frac{Ab}{2} + B = 0 \\ u_x\left(+\frac{b}{2}\right) = \frac{\Delta p}{2\mu L}\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{Ab}{2} + B = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\Delta p\, b^2}{8\mu L} - \frac{Ab}{2} + B = 0 & (I) \\ \frac{\Delta p\, b^2}{8\mu L} + \frac{Ab}{2} + B = 0 & (II) \end{cases}$$

Système de deux équations à deux inconnues ;

$$(I) + (II) : \quad \frac{\Delta p\, b^2}{4\mu L} + 2B = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{B = -\frac{b^2 \Delta p}{8\mu L}}$$

$(II) - (I) \Rightarrow Ab = 0$

$$\Rightarrow \boxed{A = 0}$$

$$\boxed{u_x(y) = \frac{b^2 \Delta p}{2\mu L}\left[\left(\frac{y}{b}\right)^2 - \frac{1}{4}\right]}$$

3) La vitesse moyenne est donnée par :

$$\overline{U} = \frac{1}{b}\int_{-b/2}^{b/2} u_x(y)\,dy$$

$$= \frac{1}{b}\int_{-b/2}^{b/2} \frac{b^2 \Delta p}{2\mu L}\left[\left(\frac{y}{b}\right)^2 - \frac{1}{4}\right] dy$$

$$= \frac{b\,\Delta p}{2\mu L}\int_{-b/2}^{b/2}\left[\left(\frac{y}{b}\right)^2 - \frac{1}{4}\right] dy$$

$$= \frac{b\Delta p}{2\mu L}\left[\frac{y^3}{3b^2} - \frac{y}{4}\right]_{-b/2}^{b/2}$$

$$= \frac{b^2\Delta p}{2\mu L}\left(\frac{1}{24} + \frac{1}{24} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\right)$$

$$= \frac{b^2\Delta p}{2\mu L}\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{b^2\Delta p}{2\mu L}\left(\frac{1}{12} - \frac{3}{12}\right)$$

$$\boxed{\bar{u} = -\frac{b^2\Delta p}{12\mu L}}$$

4 Écoulement par ruissellement laminaire

Sur une plaque plane lisse faisant avec l'horizontale un angle α, en mouvement permanent bidimensionnel établi et sous une épaisseur a, coule sous l'effet de la pesanteur un liquide de densité ρ et de viscosité dynamique μ.

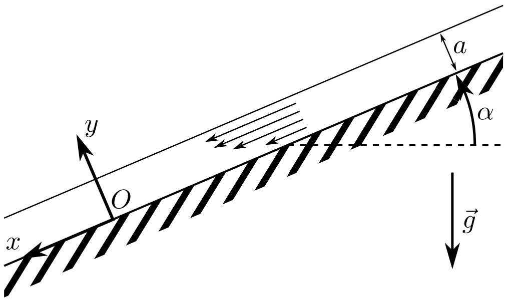


Figure 2: Écoulement par ruissellement laminaire

Le fluide est soumis à la pesanteur ($\vec{g}$). Les champs de vitesse et de pression sont sujets aux conditions aux limites suivantes : sur la plaque ($y = 0$),

$$\begin{cases} u\,(x,0) = 0, \\ v\,(x,0) = 0, \end{cases}$$

et sur la surface libre ($y = a$),

$$\begin{cases} v\,(x,a) = 0, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{(x,a)} = 0, \\ P\,(x,a) = P_{\mathrm{atm}}. \end{cases}$$

(contrainte visqueux nul)

On cherche à déterminer le débit volumique par unité de largeur par la résolution des équations de Navier – Stokes :

CONTINUITÉ

$$\begin{cases} \cancel{\dfrac{\partial u}{\partial x}} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ \rho \cancel{\dfrac{\partial u}{\partial t}} + \rho u \cancel{\dfrac{\partial u}{\partial x}} + \rho v \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\cancel{\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \rho g \sin\alpha, \\ \rho \cancel{\dfrac{\partial v}{\partial t}} + \rho u \cancel{\dfrac{\partial v}{\partial x}} + \rho v \dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{\partial P}{\partial y} + \mu \left(\cancel{\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \rho g \cos\alpha. \end{cases}$$

QdM.

Il s'agit de l'équation de la continuité, et des composantes x et y de l'équation de conservation de la quantité de mouvement (QdM).

$u_x \longleftrightarrow u$

$u_y \longleftrightarrow v$

① $$\frac{dv}{dy} = 0 \quad (I)$$

$$\rho v \frac{du}{dy} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{d^2u}{dy^2} + \rho g \sin\alpha \quad (II)$$

$$\rho v \frac{dv}{dy} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \frac{d^2v}{d^2y^2} - \rho g \cos\alpha \quad (III)$$

② En utilisant (I) et les conditions aux limites sur v, montrer que $v(y) = 0$.

Intégrons (I) : $v(y) = A$

Appliquons $v(0) = 0 \Rightarrow A = 0$.

On en déduit : $v(y) = 0$ (nul en tout point).

③ $$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{d^2u}{dy^2} + \rho g \sin\alpha \quad (II_{bis})$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g \cos\alpha \quad (III_{bis})$$

④ À partir de (III bis) :

$$0 = -P(x,y) - \rho g y \cos\alpha + f(x)$$

soit $$P(x,y) = -\rho g y \cos\alpha + f(x)$$

En $y=a$, on a $P(x,a) = P_{atm}$.

On en déduit

$$P_{atm} = -\rho g a \cos\alpha + f(x)$$

$$\Rightarrow f(x) = P_{atm} + \rho g a \cos\alpha.$$

On trouve enfin :

$$\boxed{P(x,y) = \rho g (a-y)\cos\alpha + P_{atm}.}$$

(5) On observe que

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_y = 0$$

d'où après substitution dans (II bis)

$$\mu \frac{d^2 u}{dy^2} + \rho g \sin\alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2 u}{dy^2} = -\frac{\rho g}{\mu} \sin\alpha.$$

(6)

$$\frac{du}{dy} = -\frac{\rho g}{\mu} \sin\alpha \, y + A$$

$$u(y) = -\frac{\rho g y^2}{2\mu} \sin\alpha + Ay + B$$

En 0 : $u = 0$

En a : $\frac{du}{dy} = 0$

$$\frac{du}{dy}(a) = -\frac{\rho g a}{\mu}\sin\alpha + A = 0$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{\rho g a}{\mu}\sin\alpha$$

$$u(0) = B = 0.$$

On en déduit :

$$\boxed{u(y) = \frac{\rho g y}{\mu}\left(a - \frac{y}{2}\right)\sin\alpha}$$

7 $$\bar{u} = \frac{1}{a}\int_0^a u(y)\,dy$$

$$= \frac{\rho g \sin\alpha}{\mu a}\int_0^a y\left(a - \frac{y}{2}\right)dy$$

$$= \frac{\rho g \sin\alpha}{\mu a}\left[\frac{a y^2}{2} - \frac{y^3}{6}\right]_0^a$$

$$= \frac{\rho g \sin\alpha}{\mu a}\left[\frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{6}\right]$$

$$\boxed{\bar{u} = \frac{\rho g a^2 \sin\alpha}{3\mu}}$$

$$Q_v = a\bar{u}$$

$$= \frac{\rho g a^3 \sin\alpha}{3\mu}$$