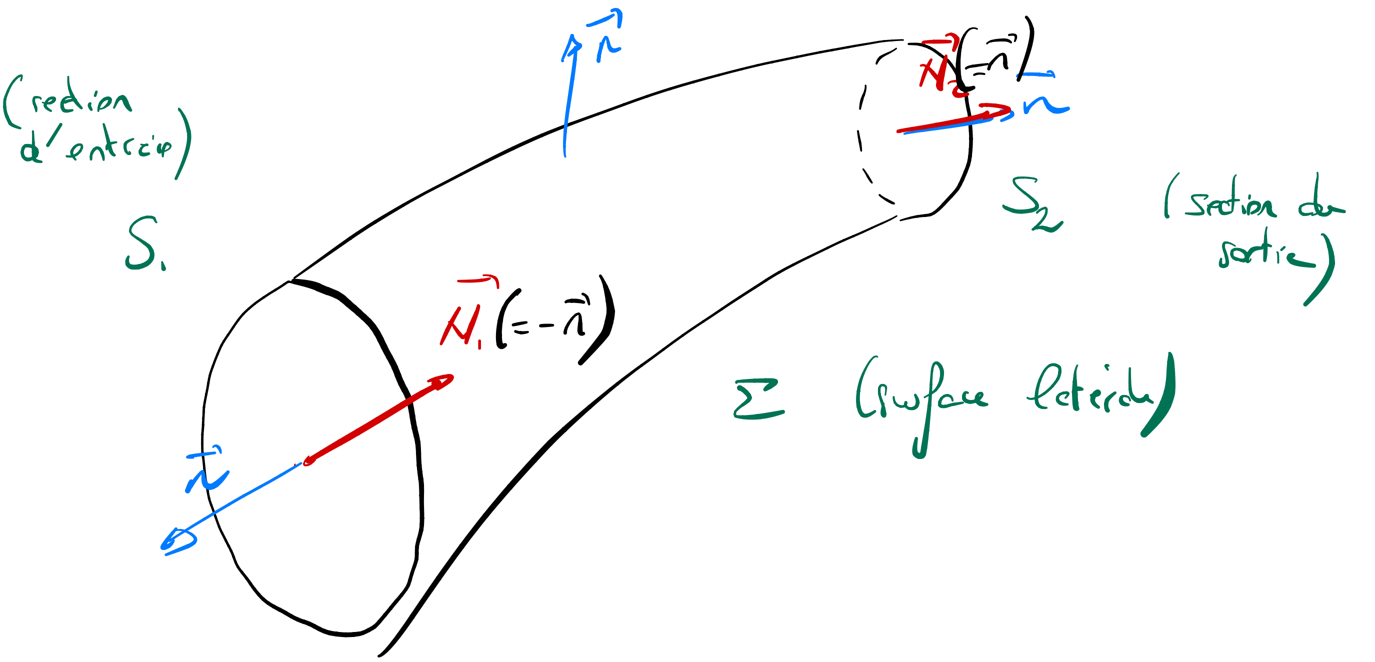
TD MECA FLU

01/04/21

THÉORÈME DE LA QDM ou THÉORÈME D'EULER.

Objectif : exprimer la force exercée par un fluide sur la conduite dans laquelle il s'écoule.



Surface totale : $\boxed{S = S_1 \cup S_2 \cup \Sigma}$

Normale extérieure : $\vec{n}$

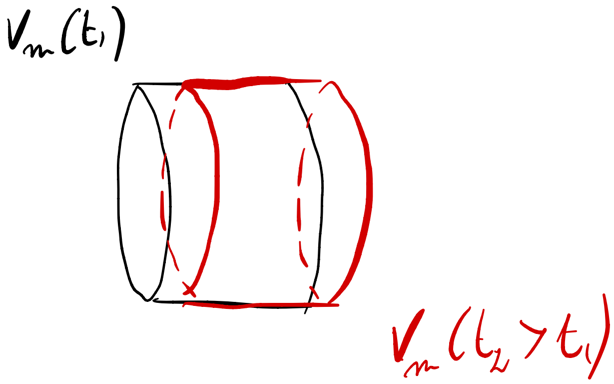
Normale des sections orientée dans le sens de l'écoulement : $\vec{N}$.

On considère comme système le fluide qui se trouve dans cette conduite. On note le volume occupé par ce fluide à l'instant t par $V_m(t)$.

Le principe fondamental de la dynamique s'applique :

$$\frac{d}{dt}\int_{V_m(t)} \rho \vec{u}\, dV = \vec{F}_E \qquad (I)$$

ensemble des forces extérieures.



Théorème de transport :

$$\frac{d}{dt}\int_{V_m(t)} \rho \vec{u}\, dt = \int_{V_m(t)} \frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t}\, dV + \oint_{S(t) = \partial V_m(t)} \rho \vec{u}\,(\vec{u}\cdot\vec{n})\, dS \qquad (II)$$

Substituons (II) dans (I) :

$$\int_{V_m(t)} \frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t}\, dV + \oint_{S(t)} \rho \vec{u}\,(\vec{u}\cdot\vec{n})\, dS = \vec{F}_E$$

Supposons que l'écoulement est permanent :

$$\frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} = \vec{0}\,.$$

$$\oint_S \underbrace{\rho \vec{u}(\vec{u}\cdot\vec{n})\,dS}_{\text{débit de qdm}} = \vec{F}_E$$

Supposons le fluide parfait ($\mu = 0$, les seules forces sont celles de volume et de pression).

$$\oint_S \rho \vec{u}(\vec{u}\cdot\vec{n})\,dS = \underbrace{-\oint_S p\vec{n}\,dS}_{A} + \int_V \rho\vec{g}\,dV \quad (\mathrm{III})$$

Ce qui nous intéresse, c'est d'exprimer la force exercée par le fluide sur la conduite :

$$\vec{F}_p = \int_\Sigma \underbrace{p\vec{n}\,dS}_{B}.$$

Or, S est l'union de S_1, S_2 et Σ : d'après la linéarité de l'intégrale, le terme A peut s'écrire :

$$\oint_S p\vec{n}\,dS = \oint_{S_1\cup\Sigma\cup S_2} p\vec{n}\,dS$$

$$= \int_{S_1} p\vec{n}\,dS + \int_{S_2} p\vec{n}\,dS + \underbrace{\int_\Sigma p\vec{n}\,dS}_{B = \vec{F}_p}$$

On peut maintenant isoler $\vec{F}_p$:

$$\vec{F}_p = \oint_S p\vec{n}\,dS - \int_{S_1} p\vec{n}\,dS - \int_{S_2} p\vec{n}\,dS \quad (\mathrm{IV})$$

Or d'après (III),

$$\oint_S p\vec{n}\,dS = -\oint_S \rho\vec{u}(\vec{u}\cdot\vec{n})\,dS + \int_V \rho\vec{g}\,dV \quad (\mathrm{II})b$$

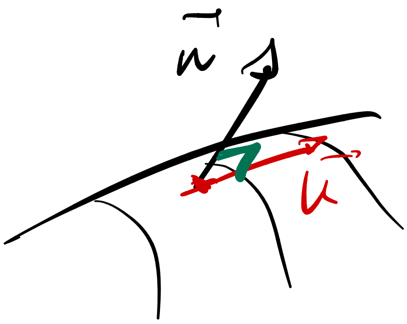
©

On remarque deux simplifications possibles :

→ $\vec{g}$ est constant :

$$\int_V \rho\vec{g}\,dV = \underbrace{\left(\int_V \rho\,dV\right)}_{=m}\vec{g} = m\vec{g}$$

→ la paroi latérale Σ est imperméable



sur Σ, $\vec{u}\cdot\vec{n} = 0$

© $$\oint_S \rho\vec{u}(\vec{u}\cdot\vec{n})\,dS = \int_{S_1} \ldots\,dS + \int_{S_2} \ldots\,dS + \underbrace{\int_\Sigma \rho\vec{u}(0)\,dS}_{=0}$$

soit encore

$$\oint_S \rho\vec{u}(\vec{u}\cdot\vec{n})\,dS = \int_{S_1} \rho\vec{u}(\vec{u}\cdot\vec{n})\,dS + \int_{S_2} \rho\vec{u}(\vec{u}\cdot\vec{n})\,dS \quad (\mathrm{V})$$

Substituons (V) dans (III)b :

$$\oint_S p\vec{n}\,dS = -\int_{S_1} \rho\vec{u}(\vec{u}\cdot\vec{n})\,dS - \int_{S_2} \rho\vec{u}(\vec{u}\cdot\vec{n})\,dS + m\vec{g} \quad (\mathrm{III})c.$$

Substituons (III)c dans (IV) :

$$\vec{F}_p = -\int_{S_1} \left[\rho\vec{u}(\vec{u}\cdot\vec{n}) + p\vec{n}\right] dS$$

$$- \int_{S_2} \left[\rho\vec{u}(\vec{u}\cdot\vec{n}) + p\vec{n}\right] dS + m\vec{g}.$$

Supposons à présent que l'écoulement dans les sections d'entrée et de sortie soit unidimensionnel :

→ En S_1, $\vec{u} = u_1\vec{N}_1$, $p = p_1$, $\vec{n} = -\vec{N}_1$

→ En S_2, $\vec{u} = u_2\vec{N}_2$, $p = p_2$, $\vec{n} = +\vec{N}_2$

$$\vec{F}_p = -\int_{S_1} \left[\rho_1 U_1 \vec{N}_1 \left(U_1 \vec{N}_1 \cdot (-\vec{N}_1) \right) + p_1 (-\vec{N}_1) \right] dS$$

$$- \int_{S_2} \left[\rho_2 U_2 \vec{N}_2 \left(U_2 N_2 \cdot (\vec{N}_2) \right) + p_2 N_2 \right] dS$$

$$+ m\vec{g}$$

$$\vec{F}_p = + \rho_1 U_1^2 \vec{N}_1 \int_{S_1} dS + p_1 \vec{N}_1 \underbrace{\int_{S_1} dS}_{= S_1 \vec{N}_1}$$

$$- \rho_2 U_2^2 \vec{N}_2 \int_{S_2} dS - p_2 \vec{N}_2 \underbrace{\int_{S_2} dS}_{= S_2 \vec{N}_2}$$

$$+ m\vec{g}$$

$$\left(\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_1 = \|\vec{N}_1\|^2 = 1 \; ; \; \vec{N}_2 \cdot \vec{N}_2 = \|\vec{N}_2\| = 1 \right)$$

soit enfin :

$= \dot{m}$ (débit massique)

$$\vec{F}_p = \rho_1 U_1 S_1 (U_1 \vec{N}_1) + p_1 \vec{N}_1 S_1 - \rho_2 U_2 S_2 (U_2 \vec{N}_2) - p_2 \vec{N}_2 S_2 + m\vec{g}$$

$$\vec{F}_p = \left(\dot{m}\, U_1 + p_1 S_1\right)\vec{N}_1 - \left(\dot{m}\, U_2 + p_2 S_2\right)\vec{N}_2 + m\vec{g}$$

Posons l'impulsion :

$$\mathcal{F} = \dot{m}\, U + p S$$

$$\vec{F}_p = \underbrace{\mathcal{F}_1 \vec{N}_1 - \mathcal{F}_2 \vec{N}_2}_{= -\Delta\left(\mathcal{F}\vec{N}\right)} + m\vec{g}$$

$$\boxed{\vec{F}_p = -\Delta\left(\mathcal{F}\vec{N}\right) + m\vec{g}}$$

FORCE EXERCÉE PAR LE FLUIDE SUR LA PAROI LATÉRALE

s'applique aussi aux fluides visqueux.

Cette formule s'applique aussi aux fluides réels, pourvu que les contraintes visqueuses soient négligeables dans les sections d'entrée et de sortie. C'est toujours le cas en pratique. Pourquoi ? :

Dans S_1 et S_2, les contraintes visqueuses sont proportionnelles à :

$$\mu \frac{\partial u}{\partial x}$$

3 Coude à angle droit

Soit un tube de section circulaire de diamètre 0.2 cm, coude à angle droit et posé sur un plan horizontal (Fig. 3). Il contient de l'eau à la pression moyenne de 6 bar.

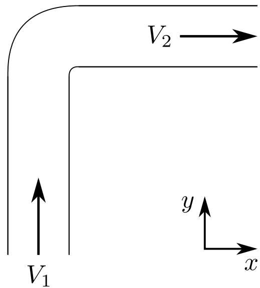
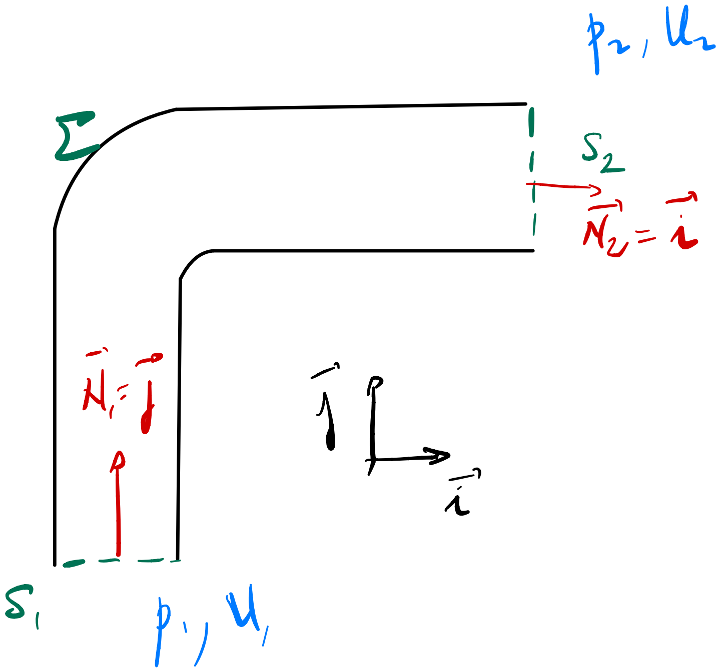


Figure 3: Coude à angle droit

1. Quelle est, en projection horizontale, la résultante des forces s'exerçant sur le coude quand la vitesse d'écoulement est négligeable ?
2. Que devient cette résultante quand la vitesse d'écoulement n'est plus négligeable et correspond à un débit de $0.160\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$? On négligera les frottements.
3. Quelle est l'action mécanique exercée par une tuyauterie en S, composée de deux coudes identiques au précédent ?



En entrée : $\vec{U_1} = U_1 \vec{j}$, p_1, $S_1 = \frac{\pi D^2}{4}$

$\vec{n_1} = -\vec{N_1} = -\vec{j}$

En sortie : $\vec{U_2} = U_2 \vec{i}$, p_2, $S_2 = \frac{\pi D^2}{4}$.

$\vec{n_2} = +\vec{N_2} = \vec{i}$.

Comme tout à l'heure, la force exercée par le fluide sur la conduite est donnée par :

$$\vec{F_f} = \int_\Sigma p \vec{n} \, dS.$$

On utilise la formule suivante : (on néglige le poids).

$$\oint \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS = -\oint_S p \vec{n} dS + \int \rho \vec{g} \, dV$$

$$= -p_1 \vec{n}_1 S_1 - p_2 \vec{n}_2 S_2 - \int_\Sigma p \vec{n} dS$$

$= \vec{F_f}$

(∗∗∗)

On trouve donc :

$$\vec{F}_p = -p_1 \vec{n}_1 S_1 - p_2 \vec{n}_2 S_2 - \underbrace{\oint_S \rho \vec{u}(\vec{u}\cdot\vec{n}) dS}$$

Or $\vec{u}\cdot\vec{n}$ est nul le long de la paroi latérale :

$$\oint_S \rho \vec{u}(\vec{u}\cdot\vec{n}) dS = \int_{S_1} \dots dS + \int_{S_2} \dots dS + \vec{0}$$

Soit :

$$\boxed{\vec{F}_p = -P_1 \vec{n}_1 S_1 - P_2 \vec{n}_2 S_2 - \int_{S_1 \cup S_2} \rho \vec{u}(\vec{u}\cdot\vec{n}) dS}$$

On peut maintenant simplifier l'intégrale :

→ sur S_1 :

$$\rho \vec{u}(\vec{u}\cdot\vec{n}) S_1 = \rho\, u_1 \vec{j}\,(u_1 \vec{j}\cdot(-\vec{j}))S_1$$
$$= \rho\, u_1^2 \underbrace{(\vec{j}\cdot\vec{j})}_{=-1} \vec{j}\, S_1$$

$$= -\underbrace{\rho U_1 S_1}_{\dot m} U_1 \vec{j}$$

$$\boxed{\rho \vec{u} (\vec{u}\cdot\vec{n}) S_1 = -\dot m U_1 \vec{j}}$$

$\rightarrow$ sur S_2

$$\rho \vec{u}(\vec{u}\cdot\vec{n}) S_2 = \rho U_2 \vec{i}\,(U_2 \underbrace{\vec{i}\cdot\vec{n}}_{=1}) S_2$$

$$= \underbrace{\rho U_2 S_2}_{\dot m} U_2 \vec{i}$$

$$\boxed{\rho \vec{u} (\vec{u}\cdot\vec{n}) S_2 = +\dot m U_2 \vec{i}}$$

$$\vec{F}_p = +P_1 S_1 \vec{j} - P_2 S_2 \vec{i} + \dot m U_1 \vec{j} - \dot m U_2 \vec{i}$$

$$\vec{F}_p = (\dot m U_1 + P_1 S_1)\vec{j} - (\dot m U_2 + P_2 S_2)\vec{i}$$

① . On suppose $U_1 = U_2 = 0$, donc pas de pertes de charge. La conduite étant horizontale, z = constante de Bernoulli :

$$0 + P + 0 = \text{constante}$$

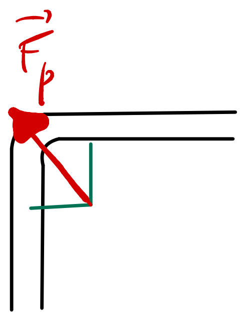
donc la pression est constante :

$$P_1 = P_2 = 6 \text{ bar.} \ (= P_0).$$

$$\vec{F_p} = (0 + P_0 S_1)\,\vec{j} - (0 + P_0 S_2)\,\vec{i}$$

où $S_1 = S_2 = \frac{\pi D^2}{4}$.

Soit enfin : $\vec{F_p} = P_0 S\,(\vec{j} - \vec{i})$



② Pas de pertes de charge :

$$P_1 + \cancel{\tfrac{1}{2}\rho U_1^2} + \cancel{\rho g z_0} = P_2 + \cancel{\tfrac{1}{2}\rho U_2^2} + \cancel{\rho g z_0}$$

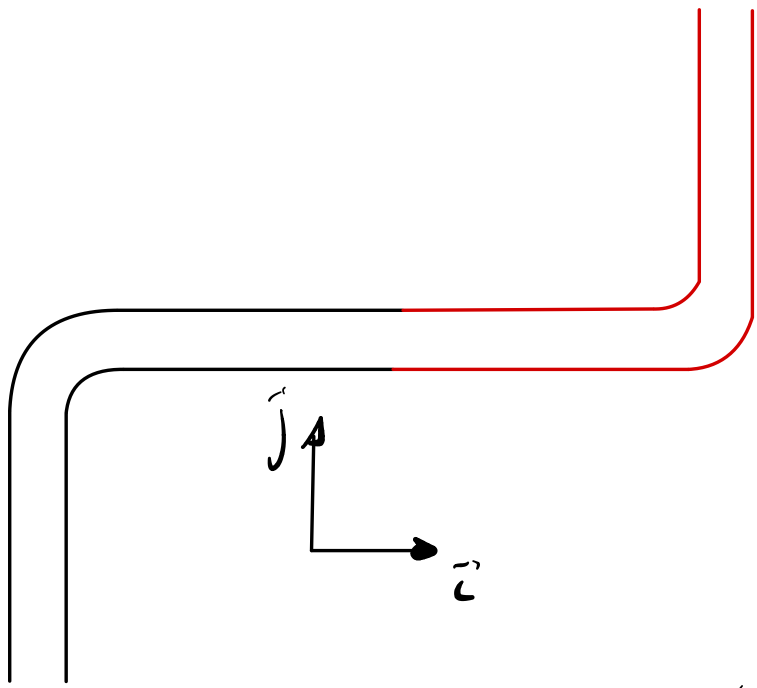
($U_1 = U_2$ car section constante)

soit encore $P_1 = P_2 = P_0 = 6$ bar.

$$\vec{F}_p = \left(\dot{m}\,U + P_0 S\right)\left(\vec{j} - \vec{i}\right)$$

où $U = \dfrac{4q}{\pi D^2} =$

③



$\boxed{Q = 0{,}160 \ l/s}$

$\left(\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{n}\| = \|\vec{N}\| = 1\right)$