6 Variation d'entropie d'une masse d'eau

On considère un système de $m = 1\,\mathrm{kg}$ d'eau à l'état liquide, à la pression atmosphérique et à la température $T_0 = 0\,°\mathrm{C}$. Ce système est mis en contact avec une source de chaleur à $T_N = 100\,°\mathrm{C}$ tout en étant maintenu à la pression atmosphérique. On donne la chaleur massique de l'eau : $c_P = 1000\,\mathrm{cal\,K^{-1}\,kg^{-1}}$.

1. Quelle est l'entropie totale créée lorsque l'eau atteint la température T_N tant qu'elle reste à l'état liquide ? Application numérique.
2. Si on avait chauffé l'eau en deux étapes, de $0\,°\mathrm{C}$ à $50\,°\mathrm{C}$ au contact d'une source à $50\,°\mathrm{C}$, puis de $50\,°\mathrm{C}$ à $100\,°\mathrm{C}$ au contact avec une seconde source à $100\,°\mathrm{C}$, quelle aurait été l'entropie totale créée ?
3. En vous inspirant de ce résultat, expliquer comment il faudrait opérer pour chauffer l'eau de $0\,°\mathrm{C}$ à $100\,°\mathrm{C}$ sans accroître l'entropie de l'Univers.

Q1

$$S^c = m c_p \left[\ln\left(\frac{T_N}{T_0}\right) - \frac{T_N - T_0}{T_N} \right]$$

EI

EF.

$$T_1 = 50°C \rightarrow 100°C = T_2$$

Q2

$$S^c_{[2]} = S^c_1 + S^c_2$$

$$T_0 = 0°C \rightarrow 50°C = T_1$$

$$\boxed{S^c_{[2]} = m c_p \left[\ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right) - \frac{T_1 - T_0}{T_1} + \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - \frac{T_2 - T_1}{T_2} \right]}$$

Comparons cette création à celle de la question précédente (mise en contact avec un seul thermostat) :

RAPPEL : $S^c_{[1]} = 184$ J/K.

$S^c_{[2]} = 97{,}1$ J/K.

On remarque que :

$$S^c_{[1]} > S^c_{[2]}$$

Que se passera t'il s'y ajoute un autre thermostat ?

Q1 : $0°C \longrightarrow 100°C$ $\quad S^c_{[1]}$

$>$

Q2 : $0°C \longrightarrow 50°C \longrightarrow 100°C$ $\quad S^c_{[2]}$

$\geq$

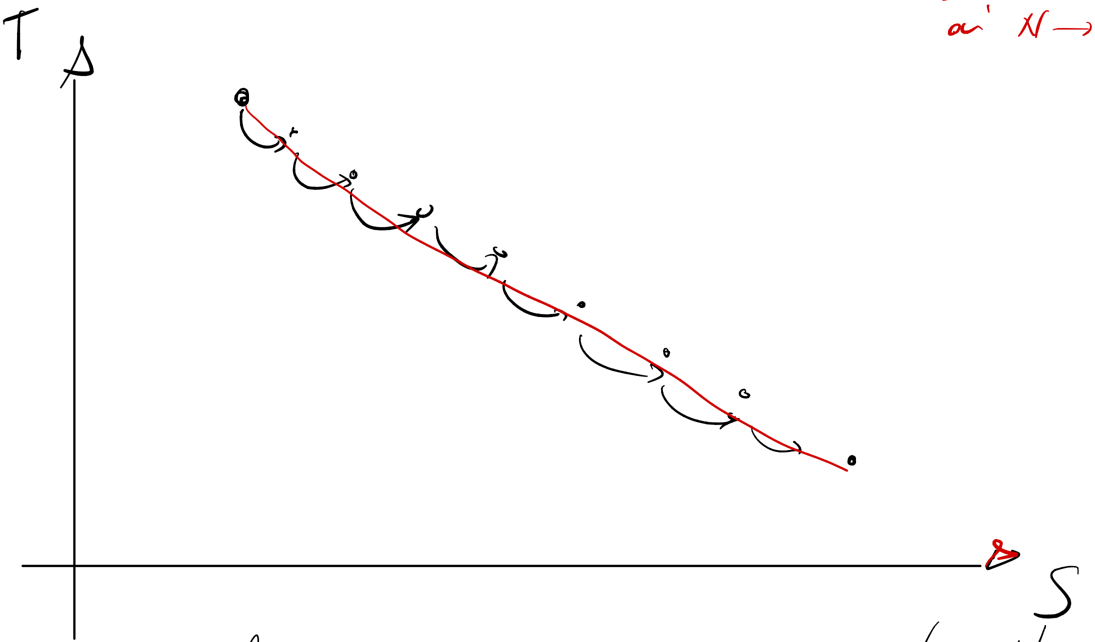
Q3 : $0°C \longrightarrow 33°C \longrightarrow 66°C \longrightarrow 100°C$ $\quad S^c_{[3]}$

On peut conjecturer :

$$S^c_{[1]} > S^c_{[2]} > S^c_{[3]} > \dots > S^c_{[N]}$$

? dans la limite où $N \to \infty$

Q3)



Dans la limite où le nombre de thermostats tend vers l'infini, on rend la transformation quasi-statique.

Dans cette limite, la création d'entropie doit être nulle. Mathématiquement :

$$\lim_{N \to +\infty} S^c_{[N]} = 0.$$

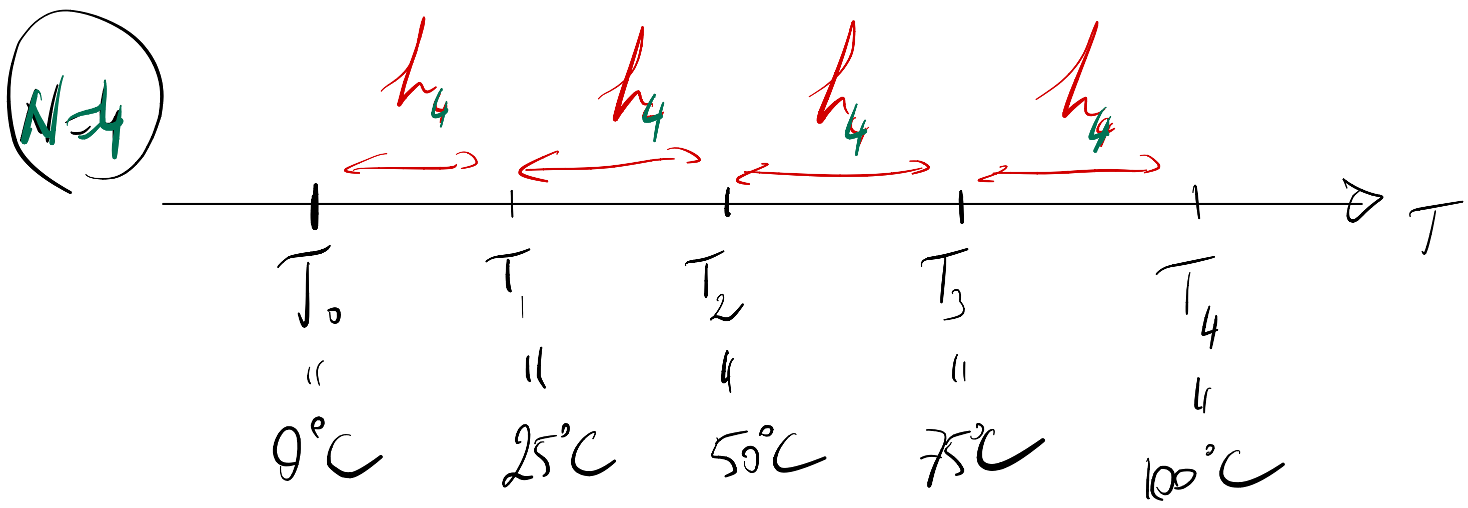
(Démonstration : HORS PROGRAMME).

Considérons N thermostats dont les températures sont données par :

$$\forall i \in [\![1, N]\!], \quad T_i = T_0 + i\frac{\Delta T}{N}$$

avec $\begin{cases} T_0 = 0°C \\ T_N = 100°C \end{cases}$ et $\Delta T = T_N - T_0$

Posons $h_N = \dfrac{\Delta T}{N}$



On peut généraliser la formule de Q2 :

$$S^c_{[N]} = S^c_1 + S^c_2 + \dots + S^c_N$$

$$= \sum_{i=1}^{N} S^c_i \quad (I)$$

résultat de Q1 en fonction de T_{i-1} et T_i

$$\forall i \in [\![1, N]\!], \quad S_i^c = m c_p \left[\ln\left(\frac{T_i}{T_{i-1}}\right) - \frac{T_i - T_{i-1}}{T_i} \right]$$

Simplifie le numérateur du quotient

$$\forall i \in [\![1, N]\!], \quad T_i - T_{i-1} = (\cancel{T_0} + \cancel{i}\, h_N) - (\cancel{T_0} + (\cancel{i}-1) h_N)$$

$$= h_N$$

On en déduit :

$$\forall i \in [\![1, N]\!], \quad S_i^c = m c_p \left[\ln\left(\frac{T_i}{T_{i-1}}\right) - \frac{h_N}{T_i} \right]$$

Reprenons (I) :

$$S^c_{[N]} = \sum_{i=1}^{N} S_i^c$$

$$= m c_p \sum_{i=1}^{N} \left[\underbrace{\ln\left(\frac{T_i}{T_{i-1}}\right)}_{= \ln(T_i) - \ln(T_{i-1})} - \frac{h_N}{T_i} \right]$$

On trouve :

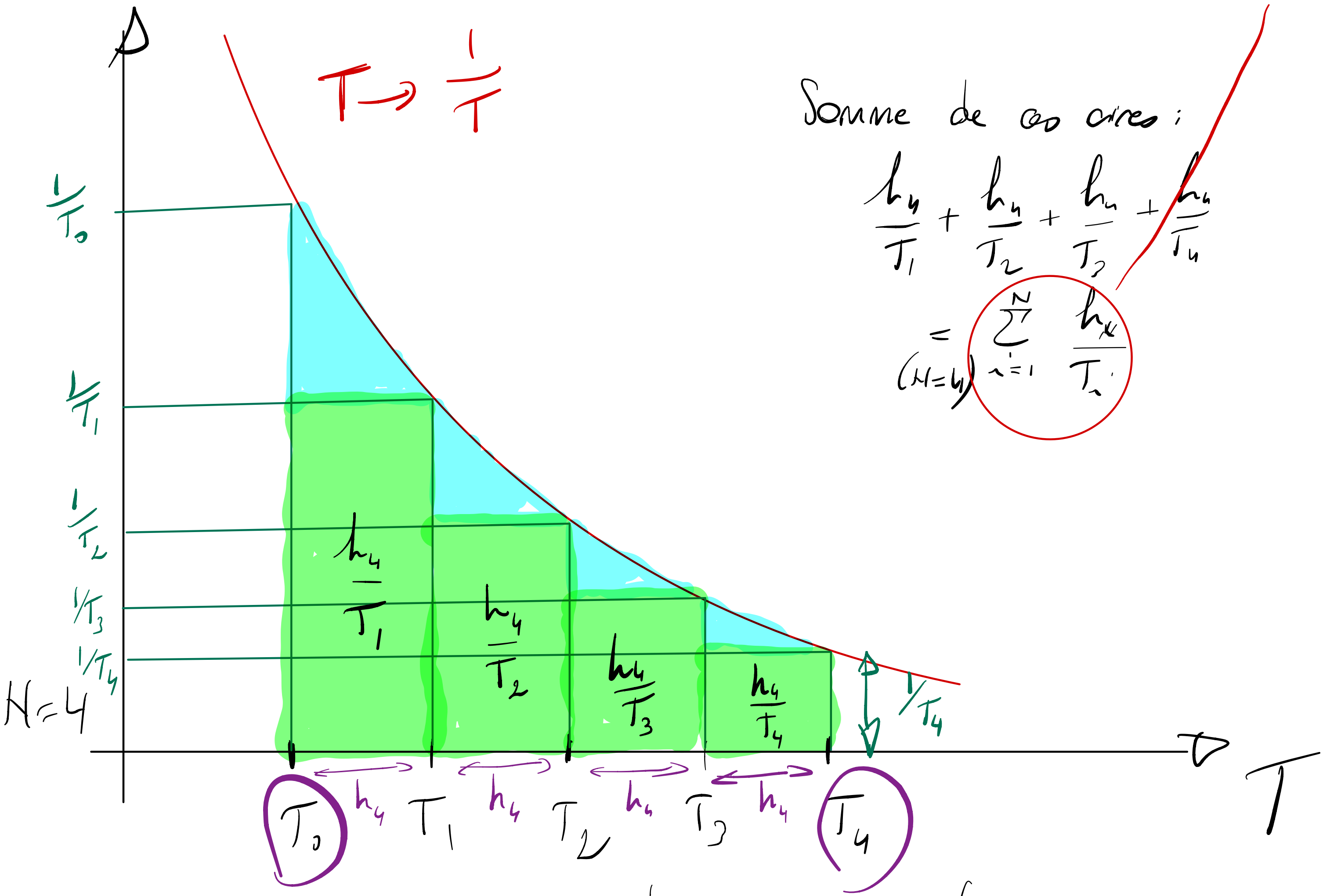
$$
\begin{aligned}
S^{c}_{[N]} = m c_p \Big(& \cancel{\ln T_1} - \ln T_0 - \frac{h_N}{T_1} \\
& + \cancel{\ln T_2} - \cancel{\ln T_1} - \frac{h_N}{T_2} \\
& + \cancel{\ln T_3} - \cancel{\ln T_2} - \frac{h_N}{T_3} \\
& \quad \vdots \\
& + \cancel{\ln T_{N-1}} - \cancel{\ln T_{N-2}} - \frac{h_N}{T_{N-1}} \\
& + \ln T_N - \cancel{\ln T_{N-1}} - \frac{h_N}{T_N} \Big)
\end{aligned}
$$

Il reste :

$$S^{c}_{[N]} = m c_p \left[\ln T_N - \ln T_0 - \sum_{i=1}^{N} \frac{h_N}{T_i} \right]$$

Objectif (rappel) : montrer que

$$\lim_{N \to +\infty} S^{c}_{[N]} = 0 .$$



Somme de ces aires :

$$\frac{h_4}{T_1}+\frac{h_4}{T_2}+\frac{h_4}{T_3}+\frac{h_4}{T_4} \underset{(N=4)}{=} \sum_{i=1}^{N} \frac{h_N}{T_i}$$

Or la somme des aires de ces rectangles tend vers l'aire sous le graphe de la fonction $T \mapsto \frac{1}{T}$ entre T_0 et T_4 :

$$\int_{T_0}^{T_N} \frac{1}{T}\, dT = [\ln T]_{T_0}^{T_N}$$

$$= \ln T_N - \ln T_0$$

Or plus les rectangles sont petits

(c-à-d plus N est grand) plus difference se reduit. On a donc (c'est la définition de l'intégrale) :

$$\boxed{\lim_{N\to\infty}\underbrace{\left(\ln T_N - \ln T_0 - \sum_{i=1}^{N}\frac{h_N}{T_i}\right)}_{=\frac{S^c_{[N]}}{mC_p}} = 0^+}$$

1 Prise de risque

Un inventeur affirme avoir mis au point un moteur fournissant 30 kWh alors qu'il consomme 89 000 kcal en provenance d'un thermostat à 400 K et qu'il rejette 63 000 kcal dans des vapeurs à 300 K en 1 h.

Investissez-vous de l'argent pour commercialiser ce moteur ?

Donnée : $1\,\mathrm{cal} = 4.184\,\mathrm{J}$.

ETAPE 1 : vérifier la compatibilité avec le premier principe.

"l'énergie est-elle conservée ?"

ETAPE 2 : compatibilité avec le 2nd principe.

$$\eta_M = \frac{-W}{Q_c} < 1 - \frac{T_F}{T_c}$$

efficacité du moteur de Carnot

$W = -30$ kWh

$Q_c = 89000$ kcal $\qquad T_c = 400$ K

$Q_F = -63000$ kcal $\qquad T_F = 300$ K.

Lors d'un cycle, la variation de toute fonction s'annule :

$$\Delta U = 0 \qquad \Delta H = 0$$
$$(\Delta S = 0) \qquad \Delta G = 0 \quad \ldots$$

Appliquons le premier principe :

$$\Delta U = W + Q_c + Q_F$$
$$= 0 \quad (\text{cycle})$$

d'où (si les données sont correctes) :

$$W + Q_c + Q_F = 0.$$

$$W = -30\ \text{kWh} \xrightarrow{\times 3600\ s/h} = -108000\ \text{kJ}$$

$$Q_c = 89000\ \text{kcal} = +372400\ \text{kJ}$$

$$Q_F = -63000\ \text{kcal} \xrightarrow{\times 4{,}184\ J/cal} = -263600\ \text{kJ}$$

$$W + Q_c + Q_F = 784\ \text{kJ} \quad (\simeq 0)$$

$$\left(\frac{W + Q_c + Q_F}{\max(|W|, |Q_c|, |Q_F|)} = \frac{W + Q_c + Q_F}{|Q_c|} = 0{,}2\% \right)$$

L'énergie est conservée, les données de l'inventeur sont compatibles avec le premier principe.

De plus, l'efficacité du moteur :

$$\eta_m = \frac{-W}{Q_c} = 0{,}29$$

à comparer avec l'efficacité théorique maximale (celle du moteur de Carnot) :

$$1 - \frac{T_F}{T_c} = 1 - \frac{300}{400} = 0{,}25$$

$$\eta_m > 1 - \frac{T_F}{T_c} \qquad \text{IMPOSSIBLE}$$

$$\frac{0{,}29 - 0{,}25}{0{,}29} = 14\%.$$

Un investisseur prudent ne se lance dans cette entreprise.

2 Centrales électriques

1. Une centrale typique produit 1000 MW de puissance électrique. L'efficacité vaut 40 %. Quelle est la puissance calorifique dissipée dans l'eau de refroidissement ?
2. Une centrale nucléaire fournissant une puissance $P = 1000\,\mathrm{MW}$ est installée au bord d'un fleuve dont la température est $T_2 = 300\,\mathrm{K}$ et le débit $Q = 400\,\mathrm{m}^3\,\mathrm{s}^{-1}$. La température de la source chaude est $T_1 = 700\,\mathrm{K}$. En admettant que le rendement réel soit seulement la fraction $x = 60\,\%$ du rendement de Carnot réversible, calculer l'élévation de température du fleuve qui résulte du fonctionnement de la centrale, en fonction de T_1, T_2 et des paramètres du problème.

Donnée : la chaleur spécifique de l'eau vaut $c_P = 4.18\,\mathrm{kJ\,kg^{-1}\,K^{-1}}$.

$$\dot{W} = -1000\ MW$$

$$\eta_M = \frac{-\dot{W}}{\dot{Q}_c} = 40\% \qquad (II)$$

$$\dot{Q}_F = ?$$

$$(II) \Rightarrow \dot{Q}_c = \frac{-\dot{W}}{\eta_M} = \frac{1000\ MW}{0{,}4} = 2500\ MW.$$

le premier principe :

$$\dot{W} + \dot{Q}_c + \dot{Q}_F = 0$$

$$\dot{Q}_F = -\dot{W} - \dot{Q}_c$$

$$= 1000 - 2500$$

$$\boxed{\dot{Q}_F = -1500\ MW.}$$

puissance dissipée dans l'eau de refroidissement.

Q2

$$\dot{W} = -1000\ MW$$

$$q_v = 400\ m^3/s.$$

$$T_1 = 700\ K$$

$$T_2 = 300\ K$$

$$x = 60\% = \frac{\eta_M}{1 - \frac{T_F}{T_c}} \Rightarrow \eta_M = \left(1 - \frac{T_F}{T_c}\right)x$$

Or $\eta_M = \frac{-\dot{W}}{\dot{Q}_c}$

Donc :
$$\frac{-\dot{W}}{\dot{Q}_c} = \left(1 - \frac{T_F}{T_C}\right) x$$
$= ?$

$$\Rightarrow \dot{Q}_c = \frac{-\dot{W}}{\left(1 - \frac{T_F}{T_C}\right) x} \quad (\text{III})$$

$\dot{Q}_F = ?$ On utilise le premier principe sur le cycle du moteur :

$$\Delta U = 0 = \dot{W} + \dot{Q}_c + \dot{Q}_F$$

$$\Rightarrow \dot{Q}_F = -\dot{W} - \dot{Q}_c$$

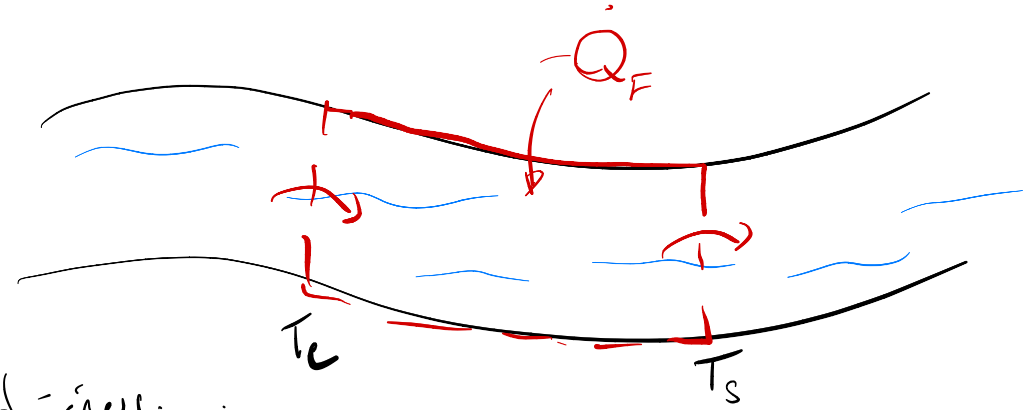
D'après (III) :

$$\dot{Q}_F = -\dot{W} + \frac{\dot{W}}{\left(1 - \frac{T_F}{T_C}\right) x}$$

$$= (-\dot{W}) \left[1 - \frac{1}{\left(1 - \frac{T_F}{T_C}\right) x} \right]$$

A.N. :

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{Q}_c &= 2920 \text{ kW} \\ \dot{Q}_F &= -1920 \text{ kW.} \end{aligned}}$$



Bilan d'énergie :

$$q_m c_p T_e - q_m c_p T_s - \dot{Q}_F = 0$$

$$\Rightarrow \quad -q_m c_p \underbrace{(T_s - T_e)}_{=\Delta T} - \dot{Q}_F = 0$$

$$\Rightarrow \quad -q_m c_p \Delta T = \dot{Q}_F$$

$$\Rightarrow \quad \Delta T = \frac{-\dot{Q}_F}{q_m c_p} \quad \text{où} \quad q_m = \rho q_v$$

A.N. : $$\Delta T = \frac{+1920 \times 10^6}{1000 \times 400 \times 4180} = 1\,K$$

3 Pompe à chaleur

Q1

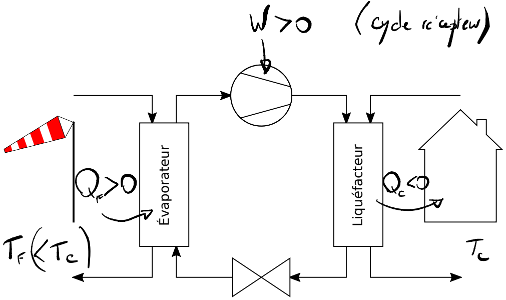


Figure 1: Pompe à chaleur

Une pompe à chaleur est utilisée pour assurer le chauffage (en hiver) ou le refroidissement (en été) d'une maison. Le fluide accomplissant les cycles dans la pompe est le fréon. Il parcourt un circuit dans lequel, étant sous forme de vapeur, il est comprimé par un compresseur et se condense dans un liquéfacteur. Puis il subit une détente au niveau d'une valve et finit de se vaporiser dans un évaporateur avant de revenir au compresseur (voir figure -Fig. 1).

1. En hiver, lequel du liquéfacteur ou de l'évaporateur faut-il mettre en contact avec la maison ? Indiquer les chaleurs échangées entre la maison et l'extérieur sur un schéma identique à celui de la figure -Fig. 1.

2. La température extérieure moyenne est de 0 °C, la température de la maison 20 °C et la puissance du compresseur électrique est de 4000 W.

   a. En déduire l'efficacité maximale de la pompe à chaleur.
   b. Quelle quantité de chaleur serait obtenue si la puissance électrique était dépensée dans un radiateur électrique ? Commenter.

3. Le débit de chaleur vers l'extérieur par fuite thermique, $\dot{Q}_f$, est supposé proportionnel à l'écart de température entre l'intérieur T_i et l'extérieur T_e :

$$\dot{Q}_f = -k\,(T_i - T_e)$$

   où $k > 0$. Sachant que l'efficacité réelle de la pompe est trois fois plus faible que l'efficacité maximale, calculer le coefficient de proportionnalité k.

(Q2) L'efficacité de la PAC est définie par :

$$\eta_{PAC} = \frac{-\dot{Q}_c}{\dot{W}}$$

Rappel : pour le moteur

$$\eta_m = \frac{-\dot{W}}{\dot{Q}_c}$$

$$\eta_{PAC} = \frac{1}{\eta_m}$$

L'efficacité maximale est celle du cycle de Carnot :

$$\eta_{PAC} < \frac{1}{1 - \frac{T_F}{T_C}}$$

Or $T_F = 273{,}15\,K$

$T_C = 293{,}15\,K$

$$\eta_{PAC} < \frac{1}{1 - \frac{273{,}15}{293{,}15}} = 14{,}7.$$

Un radiateur électrique se contente de convertir (et non pas transférer) les différents types d'énergie.
Un radiateur de 6000 W ne pourra donc pas délivrer plus de 6000 W de puissance thermique.

(Q3).

$$\eta_{PAC} = \frac{1}{3} \times \eta_{CARNOT} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{1 - \frac{T_F}{T_C}}$$

$$\Rightarrow \eta_{PAC} = \frac{14{,}7}{3} = 4{,}89 \quad \left(= \frac{-\dot{Q}_c}{\dot{W}} \right)$$

Si $\dot{W} = 4000\,W$ on obtient

$$\dot{Q}_c = -\dot{W}\,\eta_{PAC} = -19\,500\,W.$$

On fait un bilan de flux thermique sur notre meilon :

fuites (f minuscule)

les pertes sont compensées par le chauffage

$$-\dot{Q}_c + \dot{Q}_f = 0$$

$$\Rightarrow -\dot{Q}_c - k(T_c - T_F) = 0$$

température de la source froide (F majuscule)

$$\Rightarrow k = \frac{-\dot{Q}_c}{T_c - T_F}$$

$$= \frac{19500}{20}$$

$$\boxed{k = 977\ W/K}$$