Rappel : Q1 - ex6

$$S^c = mc\left[\ln\left(\frac{T_N}{T_0}\right) - \frac{T_N - T_0}{T_N}\right]$$

E.I.

E.F.

$$x = \frac{T_0}{T_N}$$

$$\frac{S^c}{mc} = x - 1 - \ln x = f(x)$$

Q2. Chauffage par 2 étapes :

$T_0 \longrightarrow T_1 = 50°C$

$T_1 \longrightarrow T_2 = 100°C.$

On procède par étape :

$$\boxed{\begin{cases} S_1^c = mc\left[\ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right) - \frac{T_1 - T_0}{T_1}\right] \\ S_2^c = mc\left[\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - \frac{T_2 - T_1}{T_2}\right] \end{cases}}$$

Posons $\begin{cases} x_1 = \frac{T_0}{T_1} \\ x_2 = \frac{T_1}{T_2} \end{cases}$

Alors : $\frac{S_1^c}{mc} = x_1 - 1 - \ln x_1$

$$\frac{S_2^c}{mc} = x_2 - 1 - \ln x_2$$

(voir la feuille de calcul où on montre que

$$S^c > S_1^c + S_2^c > S_1^c + S_2^c + S_3^c > \dots \geq 0$$

Q1 Q2 Q3

---

6 Variation d'entropie d'une masse d'eau

On considère un système de $m = 1\,\mathrm{kg}$ d'eau à l'état liquide, à la pression atmosphérique et à la température $T_0 = 0\,°\mathrm{C}$. Ce système est mis en contact avec une source de chaleur à $T_N = 100\,°\mathrm{C}$ tout en étant maintenu à la pression atmosphérique. On donne la chaleur massique de l'eau : $c_P = 1000\,\mathrm{cal\,K^{-1}\,kg^{-1}}$.

1. Quelle est l'entropie totale créée lorsque l'eau atteint la température T_N tant qu'elle reste à l'état liquide ? Application numérique.
2. Si on avait chauffé l'eau en deux étapes, de $0\,°\mathrm{C}$ à $50\,°\mathrm{C}$ au contact d'une source à $50\,°\mathrm{C}$, puis de $50\,°\mathrm{C}$ à $100\,°\mathrm{C}$ au contact avec une seconde source à $100\,°\mathrm{C}$, quelle aurait été l'entropie totale créée ?
3. En vous inspirant de ce résultat, expliquer comment il faudrait opérer pour chauffer l'eau de $0\,°\mathrm{C}$ à $100\,°\mathrm{C}$ sans accroître l'entropie de l'Univers.

Q3. D'après le résultat précédent, il suffit d'ajouter un thermostat pour réduire l'entropie créée :

$$T_1 = 100°C \quad > \quad \begin{matrix} T_1 = 50°C \\ T_2 = 100°C \end{matrix} \quad > \quad \begin{matrix} T_1 = 33°C \\ T_2 = 66°C \\ T_3 = 100°C \end{matrix} \quad > \quad \begin{matrix} T_1 = 25°C \\ T_2 = 50°C \\ T_3 = 75°C \\ T_4 = 100°C \end{matrix} \quad > \dots > 0$$

$N=1$ $N=2$ $N=3$ $N=4$

Est-ce que la limite est bien nulle ?

Pour démontrer, on considère une série de thermostats aux températures :

$$\forall i \in [\![1, N]\!], \quad T_i = T_0 + i\,\frac{\Delta T}{N} \quad \text{où} \quad T_0 = 50°C, \quad \Delta T = 60°C$$

Alors, pour l'échange avec le thermostat $i \in [\![1, N]\!]$, l'entropie créée vaut :

$= h_N = \frac{\Delta T}{N}$

$$\delta_i^c = mc\left[\ln\left(\frac{T_i}{T_{i-1}}\right) - \frac{T_i - T_{i-1}}{T_i}\right]$$

$$= mc\left[\ln\left(\frac{T_i}{T_{i-1}}\right) - \frac{h_N}{T_i}\right]$$

$$= mc\left[\ln(T_i) - \ln(T_{i-1}) - \frac{h_N}{T_i}\right]$$

Or l'entropie totale créée est la somme des $(\delta_i^c)_{i \in [\![1,N]\!]}$:

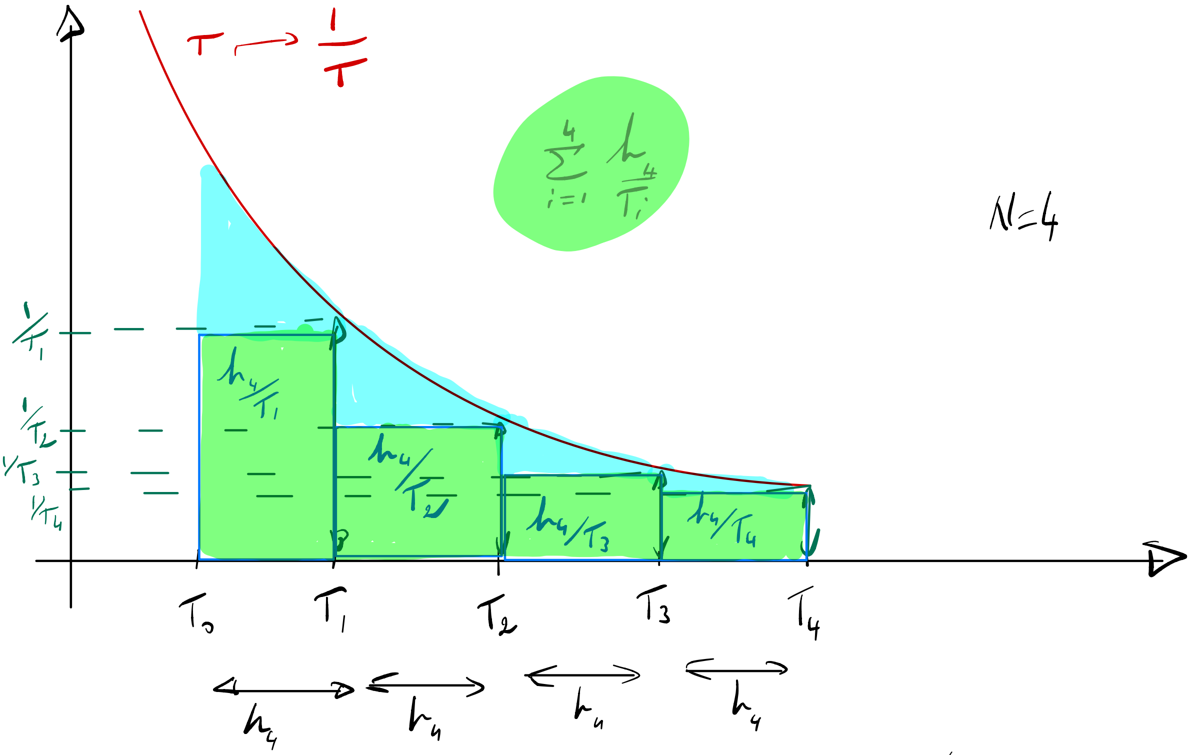
$$S^c_{[N]} = \sum_{i=1}^{N} \delta_i^c$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\left[\ln(T_i) - \ln(T_{i-1}) - \frac{h_N}{T_i}\right]$$

$$= \cancel{\ln T_1} - \ln T_0 - \frac{h_N}{T_1}$$
$$+ \cancel{\ln T_2} - \cancel{\ln T_1} - \frac{h_N}{T_2}$$
$$\dots$$
$$+ \ln T_N - \cancel{\ln T_{N-1}} - \frac{h_N}{T_N}$$

$$\boxed{S^c_{[H]} = \ln T_N - \ln T_0 - \sum_{i=1}^{N} \frac{h_N}{T_i}}$$

Pour comprendre comment cette expression s'annule dans la limite $N \to +\infty$, on peut représenter graphiquement la fonction inverse $(x \mapsto 1/x)$.

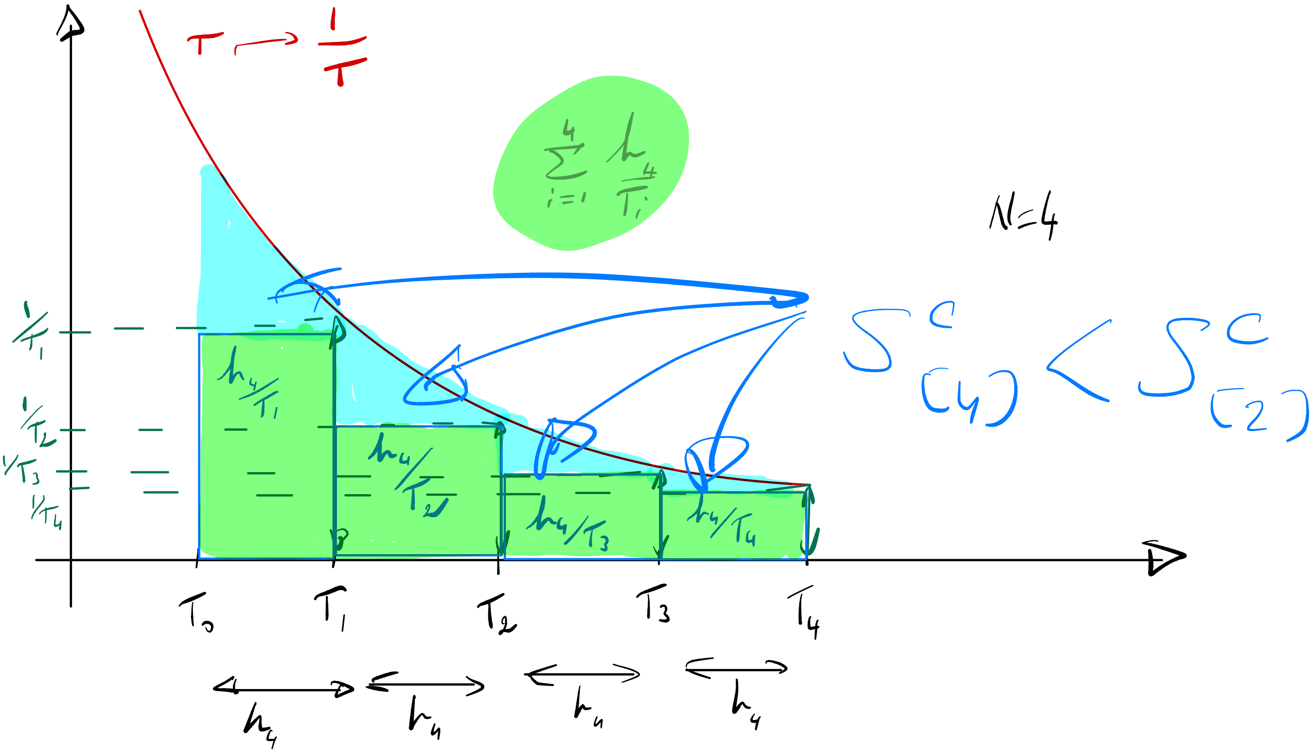


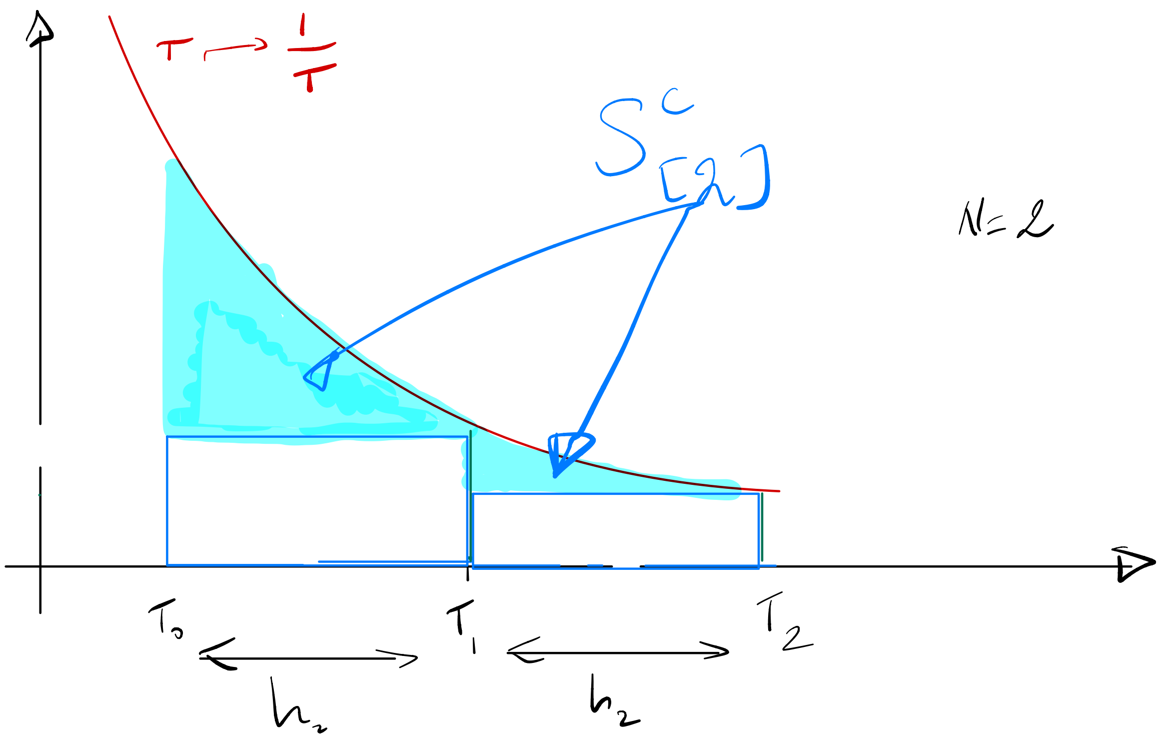
Dans la limite où la taille des rectangles tend vers 0 $(N \to +\infty)$, la somme de ces aires tend vers l'aire sous la courbe, c'est à dire :

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{h_N}{T_i} \longrightarrow \int_{T_0}^{T_N} \frac{1}{T}\, dT = \left[\ln(T)\right]_{T_0}^{T_N} = \ln(T_N) - \ln(T_0)$$

La création d'entropie d'entropie est la différence entre les

$$S^c_{[H]} = \ln(T_N) - \ln(T_0) - \sum_{i=1}^{N} \frac{h_N}{T_i}$$





On a bien montré que

$$\lim_{N \to +\infty} S^c_{[N]} = \lim_{N \to +\infty} \left[\ln(T_N) - \ln(T_0) - \sum_{i=1}^{N} \frac{h_N}{T_i} \right] = 0^+$$

Par valeurs positive

1 Prise de risque

Un inventeur affirme avoir mis au point un moteur fournissant 30 kWh alors qu'il consomme 89 000 kcal en provenance d'un thermostat à 400 K et qu'il rejette 63 000 kcal dans des vapeurs à 300 K en 1 h.

Investissez-vous de l'argent pour commercialiser ce moteur ?

Donnée : $1\,\text{cal} = 4.184\,\text{J}$.

$W = -30\,kWh$ (cycle moteur : $W<0$)
(cycle récepteur : $W>0$)

$Q_c = 89\,000$ kcal, $T_c = 400K$

$Q_F = -63000$ kcal, $T_F = 300K$

Pour un cycle : $\begin{cases} \Delta U = 0 \\ \Delta S = 0 \end{cases}$

(1) Bilan énergétique

(2) Efficacité du cycle moteur de Carnot :

$$\eta_M = \frac{-W}{Q_c} \leq 1 - \frac{T_F}{T_c}$$

Conversion en kJ :

$W = -30 \times 3600 = -108000\,kJ$

$Q_c = 89000 \times 4,184 = 372600\,kJ$

$Q_F = -63000 \times 4,184 = -263800\,kJ$

Vérifions :

$$\Delta U = 0$$

$$= W + Q_C + Q_F$$

$$= -108000 + 372600 - 263800$$

$$= 800 \text{ kJ}$$

$$\approx 1\% \times W$$ ce qui est négligeable

Le bilan énergétique semble correct.

Calculons l'efficacité maximale théorique (celle du cycle de Carnot) :

$$\eta_M = -\frac{W}{Q_C} < 1 - \frac{T_F}{T_C}$$

$$= \frac{108000}{372600} = 0,2899$$

$$= 0,25$$

L'efficacité du moteur dépasse l'efficacité théorique, ce qui n'est pas possible.

2 Centrales électriques

1. Une centrale typique produit 1000 MW de puissance électrique. L'efficacité vaut 40 %. Quelle est la puissance calorifique dissipée dans l'eau de refroidissement ?
2. Une centrale nucléaire fournissant une puissance $P = 1000\,\mathrm{MW}$ est installée au bord d'un fleuve dont la température est $T_2 = 300\,\mathrm{K}$ et le débit $Q = 400\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. La température de la source chaude est $T_1 = 700\,\mathrm{K}$. En admettant que le rendement réel soit seulement la fraction $x = 60\,\%$ du rendement de Carnot réversible, calculer l'élévation de température du fleuve qui résulte du fonctionnement de la centrale, en fonction de T_1, T_2 et des paramètres du problème.

Donnée : la chaleur spécifique de l'eau vaut $c_P = 4.18\,\mathrm{kJ\,kg^{-1}\,K^{-1}}$.

(Q1) $\dot{W} = -1000\ MW$

On rappelle l'efficacité d'un moteur :

$$\eta_M = \frac{-W}{Q_c} = \frac{\Delta t}{\Delta t}\frac{-W}{Q_c} = \underbrace{\frac{-W}{\Delta t}}_{=-\dot{W}} \times \frac{1}{\underbrace{Q_c/\Delta t}_{=\dot{Q}_c}} = \frac{-\dot{W}}{\dot{Q}_c}$$

connu — inconnue

On isole $\dot{Q}_c$:

$$\dot{Q}_c = \frac{-\dot{W}}{\eta_M} = \frac{1000\ MW}{0{,}4} = 2500\ MW.$$

On cherche $\dot{Q}_F$. On utilise le bilan énergétique :

$$\Delta \dot{U} = 0 = \dot{W} + \dot{Q}_c + \dot{Q}_f$$

On isole $\dot{Q}_F$:

$$\dot{Q}_F = -\dot{W} - \dot{Q}_c$$
$$= 1000\ MW - 2500\ MW$$
$$\boxed{\dot{Q}_F = -1500\ MW.}$$

Q2

$x =$ $$r = \frac{\eta_M}{1 - \frac{T_2}{T_1}} = \frac{\frac{-\dot{W}}{\dot{Q}_c}}{1 - T_2/T_1}$$

efficacité du cycle moteur de Carnot

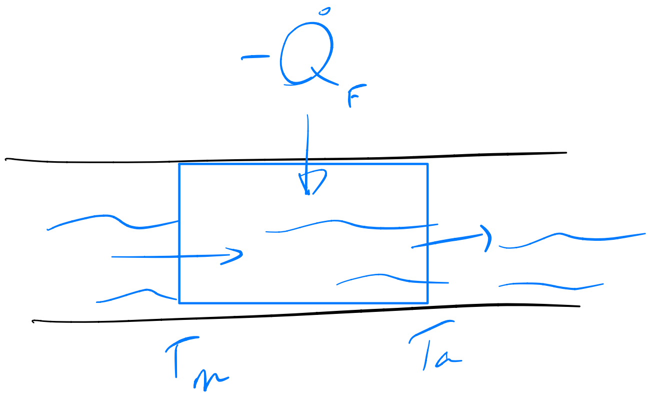
On peut isoler $\dot{Q}_c$:

$$\dot{Q}_c = \frac{-\dot{W}}{r} \times \frac{1}{1 - T_2/T_1} = 2900 \text{ MW}.$$

Pour calculer $\dot{Q}_f$, on utilise le premier principe :

$$\Delta \dot{U} = 0 = \dot{W} + \dot{Q}_c + \dot{Q}_f$$

Soit encore : $$\dot{Q}_f = -\dot{W} - \dot{Q}_c$$
$$= 1000 \text{ MW} - 2900 \text{ MW}$$
$$= -1900 \text{ MW}.$$



$$\Delta T = T_a - T_m$$

$$q_m c_p \Delta T = -\dot{Q}_F$$

$$\Rightarrow \Delta T = \frac{-\dot{Q}_f}{q_m c_p}$$

A.N. : $$\Delta T = \frac{+1900 \times 10^6}{1000 \times 400 \times 4{,}18\ 10^3} \simeq 0{,}11 \text{ K}.$$

$$q_m = \rho\, q_v$$

3 Pompe à chaleur

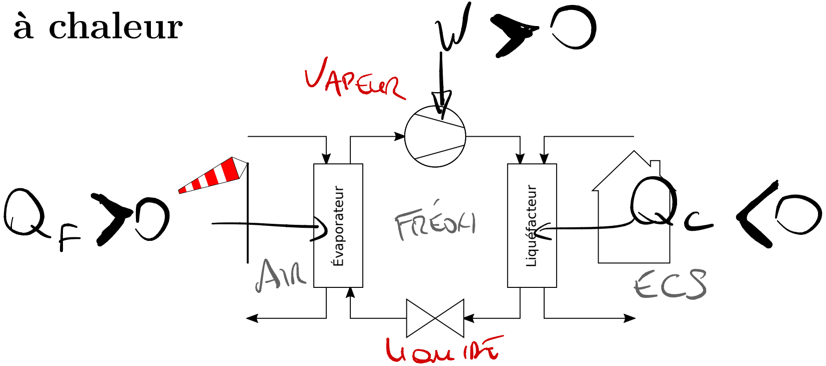


Figure 1: Pompe à chaleur

Une pompe à chaleur est utilisée pour assurer le chauffage (en hiver) ou le refroidissement (en été) d'une maison. Le fluide accomplissant les cycles dans la pompe est le fréon. Il parcourt un circuit dans lequel, étant sous forme de vapeur, il est comprimé par un compresseur et se condense dans un liquéfacteur. Puis il subit une détente au niveau d'une valve et finit de se vaporiser dans un évaporateur avant de revenir au compresseur (voir figure -Fig. 1).

1. En hiver, lequel du liquéfacteur ou de l'évaporateur faut-il mettre en contact avec la maison ? Indiquer les chaleurs échangées entre la maison et l'extérieur sur un schéma identique à celui de la figure -Fig. 1.

2. La température extérieure moyenne est de 0 °C, la température de la maison 20 °C et la puissance du compresseur électrique est de 4000 W.

   a. En déduire l'efficacité maximale de la pompe à chaleur.
   b. Quelle quantité de chaleur serait obtenue si la puissance électrique était dépensée dans un radiateur électrique ? Commenter.

3. Le débit de chaleur vers l'extérieur par fuite thermique, $\dot{Q}_f$, est supposé proportionnel à l'écart de température entre l'intérieur T_i et l'extérieur T_e :

$$\dot{Q}_f = -k\,(T_i - T_e)$$

   où $k > 0$. Sachant que l'efficacité réelle de la pompe est trois fois plus faible que l'efficacité maximale, calculer le coefficient de proportionnalité k.

Q1 C'est le condenseur.

$W > 0$ (Cycle récepteur)

$Q_F > 0$ (le système reçoit de la chaleur de l'extérieur

$Q_C < 0$ (le système cède de la chaleur à l'intérieur de la maison).

(le système = l'agent thermodynamique = le fréon ici).

Q2 L'efficacité de la PAC (pompe à chaleur) est définie par :

$$\eta_{PAC} = \frac{-Q_C}{W} \leq \frac{1}{1 - T_F/T_C}$$

EFFICACITE MAXIMAL.

cycle de Carnot

L'efficacité maximale vaut donc :

$$\frac{1}{1-T_F/T_C} = \frac{1}{1-\frac{273{,}15}{293{,}15}} = 14{,}7.$$

La puissance maximale transférée à la maison :

$$\left(-\dot{Q}_C\right)_{max} = \frac{\dot{W}}{1-\frac{T_F}{T_C}} = 4000 \times 14{,}7$$

$$= 58\,600 \text{ W}.$$

Il s'agit ici d'un transfer (et non d'une conversion) de chaleur.

Dans le cas d'un radiateur électrique classique (cà effet Joule) on ne pourra évidemment excéder les 4000 W puisque la puissance électrique est directement convertie en chaleur.

Q3

$$\eta_{PAC} \left(= \frac{-\dot{Q}_c}{\dot{W}} \right) = \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{T_F}{T_C}} = 4{,}89.$$

efficacité réelle.

On peut isoler $-\dot{Q}_c$:

$$-\dot{Q}_c = 4{,}89 \times \dot{W} = 19500\,W$$

À l'échelle de la maison, cet apport doit compenser les fuites thermiques pour assurer le maintien d'une température constante dans cette dernière :

$$-\dot{Q}_c - k(T_i - T_e) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{k = \frac{-\dot{Q}_c}{T_i - T_e} = 977 \ W/K.}$$