

## 5 Détente de Joule d'un gaz parfait

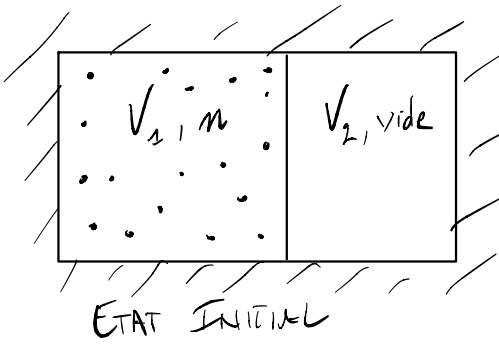
On considère une enceinte rigide adiabatique constituée de deux compartiments de volumes  $V_1$  et  $V_2$ . Les deux compartiments sont séparés par une paroi diatherme fermée par un robinet. Initialement, le robinet est fermé, le compartiment 1 contient  $n$  moles de gaz parfait, le compartiment 2 est sous vide. On ouvre le robinet et on laisse le gaz se détendre librement dans l'enceinte.

1. Faire un schéma qui illustre les états initial et final.
2. Faire le bilan énergétique de cette transformation.
3. Faire le bilan entropique de cette transformation. Commenter le signe.

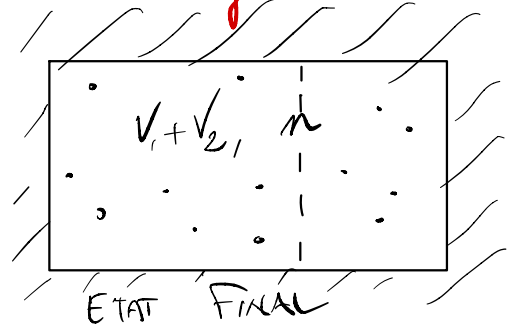
# DILATATION DE JOULE D'UN GAZ PARFAIT

$$V_i = V_2$$

(1)



$$V_f = V_1 + V_2$$



(2)

Le premier principe appliqué au système :

$$\Delta U = W + Q$$

avec  $W = 0$  (la paroi est rigide)

et  $Q = 0$  (la paroi est calorifugée).

S'agissant d'un gaz parfait, la première loi de Joule s'applique :

$$\Delta U = n \bar{c}_v \Delta T$$

$$\uparrow$$

$$[\text{J}] / [n] / [\text{mol}]$$

On déduit donc :

$$\Delta U = 0 + 0 = 0$$

$$\Delta U = n \bar{c}_v \Delta T$$

$$\Delta T = 0$$

$$\Rightarrow T_i = T_f = T$$

③ Pour faire un bilan entropique, on applique le second principe à la transformation.

GRANDEUR D'ETAT  
ou

$$\Delta S = S^r + S^c \quad (\text{I}) \quad \text{GRANDEURS DE TRANSFORMATION.}$$

ou

$$S^r = \int \frac{\delta Q}{T}$$

et par une transformation réversible; d'une part

$$S^c = 0$$

et par une transformation irréversible d'autre part

$$S^c > 0$$

S'agit-il d'un système isolé, pas de échange de chaleur avec l'extérieur,

$$S^r = \int \frac{\delta Q}{T} = 0$$

En reportant de (I):

$$\Delta S = \underbrace{S^r}_{=0} + S^c = S^c \geq 0.$$

Pour calculer  $S^c$ , il suffit de calculer  $\Delta S$ .

à vérifier.

S'étant une fonction d'état, le calcul de sa variation ne dépend de la transformation. On peut donc considérer une transformation réversible menant de l'état initial à l'état final. Dans ce cas, on écrit :

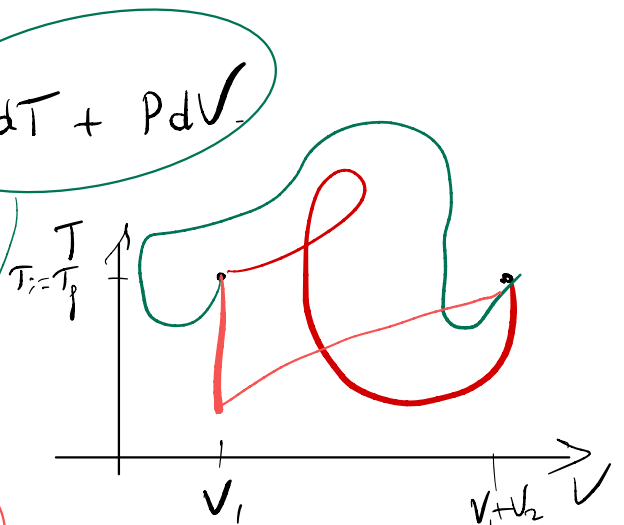
$$\begin{aligned} dU &= \delta Q_{rev} + \delta W_{QS} \\ &= \delta Q_{rev} - PdV \\ C_v dT &= \delta Q_{rev} - PdV \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{1}^{\text{re}} \text{ loi} \\ \text{de Taylor} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Travail Q.S.} \end{array}$$

On peut enfin isoler  $\delta Q_{rev}$

$$\delta Q_{rev} = C_v dT + PdV$$

Le second principe appliqué à cette transformation réversible (fictive) s'écrit

$$dS = \frac{\delta Q_{rev}}{T} + \delta S_{rev}^c = 0$$



Soit encore

$$dS = C_v \frac{dT}{T} + \frac{P}{T} dV \quad (+0)$$

$$\Delta S = \int dS = C_v \int \frac{dT}{T} + \int \frac{P}{T} dV$$

On utilise l'équation d'état des gaz parfaits :

$$PV = nRT \Rightarrow \frac{P}{T} = \frac{nR}{V}$$

On obtient enfin :

$$\Delta S = C_v \int \frac{dT}{T} + nR \int \frac{dV}{V}$$

En intégrant,  $\Delta S = C_v \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) + nR \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$

Or ici, le premier principe donne  $T_i = T_f = T$

d'où  $\Delta S = C_v \ln 1 + nR \ln\left(\frac{V_1 + V_2}{V_1}\right)$

soit enfin :  $\Delta S = nR \ln\left(1 + \frac{V_2}{V_1}\right)$

$$V_2 \geq 0 \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} \geq 0$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{V_2}{V_1} \geq 1$$

$$\Rightarrow \ln\left(1 + \frac{V_2}{V_1}\right) \geq \ln 1 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta S = S^c = nR \ln\left(1 + \frac{V_2}{V_1}\right) \geq 0$$

On a donc vérifié que

$$S^c = 0 \quad \text{quand } V_2 = 0$$

$$S^c > 0 \quad \text{quand } V_2 > 0.$$

## 6 Variation d'entropie d'une masse d'eau

On considère un système de  $m = 1$  kg d'eau à l'état liquide, à la pression atmosphérique et à la température  $T_0 = 0$  °C. Ce système est mis en contact avec une source de chaleur à  $T_N = 100$  °C tout en étant maintenu à la pression atmosphérique. On donne la chaleur massique de l'eau :  $c_P = 1000$  cal K<sup>-1</sup> kg<sup>-1</sup>.

1. Quelle est l'entropie totale créée lorsque l'eau atteint la température  $T_N$  tant qu'elle reste à l'état liquide ? Application numérique.
2. Si on avait chauffé l'eau en deux étapes, de 0 °C à 50 °C au contact d'une source à 50 °C, puis de 50 °C à 100 °C au contact avec une seconde source à 100 °C, quelle aurait été l'entropie totale créée ?
3. En vous inspirant de ce résultat, expliquer comment il faudrait opérer pour chauffer l'eau de 0 °C à 100 °C sans accroître l'entropie de l'Univers.

① On a cherché à calculer  $S^c$  lors de l'échange avec le thermostat qui se trouve à la température  $T_N$ .

Le second principe nous dit :

$$\Delta S = S^r + S^c \quad (II)$$

variation d'une fonction d'état

grandeur de transformation :  
entropie échangée avec le thermostat

$$S^r = \frac{Q}{T_{th}} = \frac{Q}{T_N}$$

(la matière du travail est fixe)

Il nous reste donc à déterminer  $\Delta S$ . Pour ce faire,

on considère une transformation réversible au cours de laquelle :

$$dS = S^r_{rev} + S^c_{rev} = 0$$

$$= \frac{\delta Q_{rev}}{T} + 0$$

Or on sait que :

$$\begin{aligned} \delta Q &= C_p dT \\ &= m C_p dT \end{aligned}$$

$$\Delta S = \int \frac{\delta Q_{rev}}{T} = \int m C_p \frac{dT}{T}$$

soit encore

$$\Delta S = m C_p \int_{T_0}^{T_N} \frac{dT}{T} = m C_p [\ln T]_{T_0}^{T_N} = m C_p \ln\left(\frac{T_N}{T_0}\right)$$

On repart de l'équation (II):

$$\Delta S = S^r + S^c$$

$$\Leftrightarrow S^c = \Delta S - S^r$$

$$= m c_p \ln\left(\frac{T_N}{T_0}\right) - \frac{Q}{T_N}$$

$$\text{Or } Q = \int_{T_0}^{T_N} m c_p dT = m c_p \int_{T_0}^{T_N} dT = m c_p (T_N - T_0)$$

On en déduit que :

$$S^c = m c_p \ln\left(\frac{T_N}{T_0}\right) - m c_p \frac{(T_N - T_0)}{T_N}$$

$$\Delta H = 1845 \text{ J/K}$$

Posons  $x = \frac{T_0}{T_N}$ . On peut voir que

$$S^c = - m c_p \ln\left(\frac{T_0}{T_N}\right) - m c_p \left(1 - \frac{T_0}{T_N}\right)$$

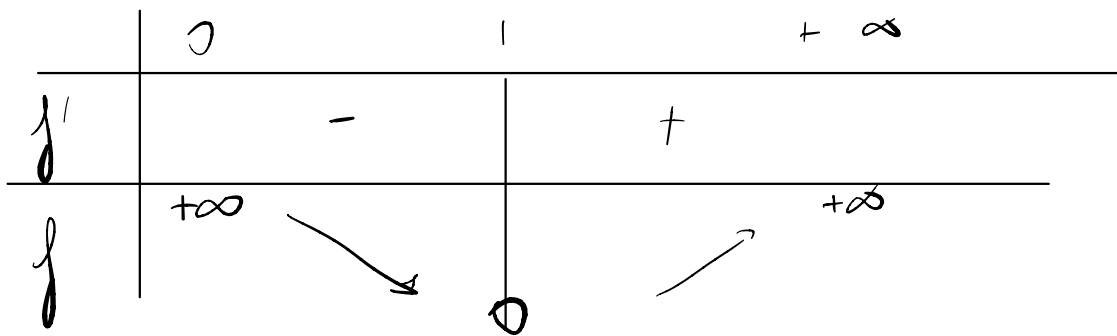
$$\Rightarrow \frac{S^c}{m c_p} = x - 1 - \ln x = f(x) \geq 0.$$





$$f: x \mapsto x - 1 - \ln x$$

$$f': x \mapsto 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$



En tout point  $x = \frac{T_0}{T_N} > 0$ ,

$$f(x) = \frac{S^c}{m c_p} \geq 0$$

(cas d'équilibre uniquement lorsque  $x=1$   
 $\Rightarrow T_0 = T_N$ ).

② Poxons :

A  $\begin{cases} T_0 = 0^\circ\text{C} \\ T_1 = 50^\circ\text{C} \end{cases}$

(Thermistor 1)

B  $\begin{cases} T_2 = 100^\circ\text{C} \\ T_1 = 50^\circ\text{C} \end{cases}$

(Thermistor 2)

$$S^c = S_A^c + S_B^c$$

EF:  $T_f = 50^\circ\text{C}$

EE:  $T_i = T_f = 50^\circ\text{C}$