3 Chaud-froid

Un objet chaud à $T_c = 573\,\mathrm{K}$ est mis en contact avec un objet froid à $T_f = 273\,\mathrm{K}$. $Q_f = 20\,\mathrm{kJ}$ de chaleur sont transférés irréversiblement du premier au second. Leurs températures sont maintenues constantes. De combien l'entropie de l'Univers a t'elle varié ?

TD. THERMODYNAMIQUE

EXERCICE 3.

BILAN ÉNERGÉTIQUE

Premier principe : soit U l'énergie totale du système, le système $1 \cup 2$ étant isolé,

$$\Delta U = 0.$$

Or l'énergie interne est une fonction extensive :

$$U = \underbrace{U_c}_{\text{CHAUD}} + \underbrace{U_f}_{\text{FROID}}$$

EXTENSIVITÉ DE U ÉNERGIE

et donc $\Delta U = \Delta U_c + \Delta U_f$

le premier principe nous dit :

$$\begin{cases} \Delta U_1 = Q_c + \cancel{W_c}^{=0} \\ \Delta U_2 = Q_f + \cancel{W_f}_{=0} \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} \Delta U_c = Q_c \\ \Delta U_f = Q_f \end{cases} = 20 \text{ kJ}.$$

On trouve enfin

$$\Delta U = \Delta U_c + \Delta U_f$$
$$= Q_c + Q_f$$
$$= 0$$

soit encore $Q_c = -Q_f = -20 \text{ kJ}.$

BILAN ENTROPIQUE

Second principe :

Soit S l'entropie du système.

$$\cancel{\Delta S = 0} \qquad \cancel{S^c = S^r_c + S^r_f} \qquad \cancel{S^c = S^c_c + S^r_f}$$

Le second principe nous dit

(1) S est une fonction d'état extensive

CHAUD FROID

$$S = S_c + S_f$$

$$\Delta S = \Delta S_c + \Delta S_f$$

(2) $$\Delta S = \underbrace{S^r}_{\text{REÇUE}} + \underbrace{S^c}_{\text{CRÉÉE}}$$

Le système OBJET CHAUD $\cup$ OBJET FROID est isolé, ce qui signifie que : $S^r = 0$.

Cela ne signifie pas que S^c est nul : $S^c \neq 0$.

On cherche à calculer : $\Delta S = S^c$

Or on sait (extensivité) que : $\Delta S = \Delta S_c + \Delta S_f$.

$$\begin{cases} \Delta S_c = S^r_c + S^c_c \\ \Delta S_f = S^r_f + S^c_f \end{cases}$$

On assimile nos deux objets à des thermostats :

$$\begin{cases} S_c^r = \dfrac{Q_c}{T_c} \\ S_f^r = \dfrac{Q_f}{T_f} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} S_c^c = 0 \\ S_f^c = 0 \end{cases}$$

On obtient :

$$\begin{cases} \Delta S_c = S_c^r + S_c^c = \dfrac{Q_c}{T_c} + 0 \\ \Delta S_f = S_f^r + S_f^c = \dfrac{Q_f}{T_f} + 0 \end{cases}$$

En substituant dans :

$$\Delta S = S^c = \Delta S_c + \Delta S_f$$

$$= \frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f}. \qquad (I)$$

Rappel : le premier principe nous a permis d'écrire

$$Q_c = -Q_f$$

En substituant Q_c par $-Q_f$ dans (I) on trouve :

$$S^c = \frac{-Q_f}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f}$$

$$\boxed{\Delta S = S^c = Q_f\left(\frac{1}{T_f} - \frac{1}{T_c}\right)}.$$

Vérifions que $S^c \geq 0$.

$$T_c \geq T_f$$
$$\frac{1}{T_c} \leq \frac{1}{T_f}$$

composition par $x \mapsto 1/x$

$$0 \leq \frac{1}{T_f} - \frac{1}{T_c}$$

On trouve enfin :

$$S^c = \underbrace{Q_f}_{\substack{\geq 0 \\ (20\text{ kJ})}} \underbrace{\left(\frac{1}{T_f} - \frac{1}{T_c}\right)}_{\substack{\geq 0 \\ (T_c = 573\text{ K} > 273\text{ K} = T_f)}} \geq 0.$$

Le second principe nous dit que l'entropie créée S^c
$$\begin{cases} = 0 & \text{pour une transformation réversible} \\ > 0 & \text{pour une transformation irréversible} \end{cases}$$

Ici :
$$S^c = Q_f \underbrace{\left(\frac{1}{T_f} - \frac{1}{T_c}\right)}_{\geq 0} \geq 0$$

$$\Rightarrow S^c \geq 0 \Rightarrow Q_f \geq 0.$$

c-à-d que la chaleur est reçue par l'objet froid (et cédée par l'objet chaud). Autrement dit, le second principe nous dit que la chaleur est transférée des objets chauds vers les objets froids.

A.N. : $\Delta S = Q_f \left(\frac{1}{T_f} - \frac{1}{T_c} \right)$

$= 80 \left(\frac{1}{273} - \frac{1}{573} \right)$

$$\boxed{\Delta S = 38{,}4 \ J/K}$$

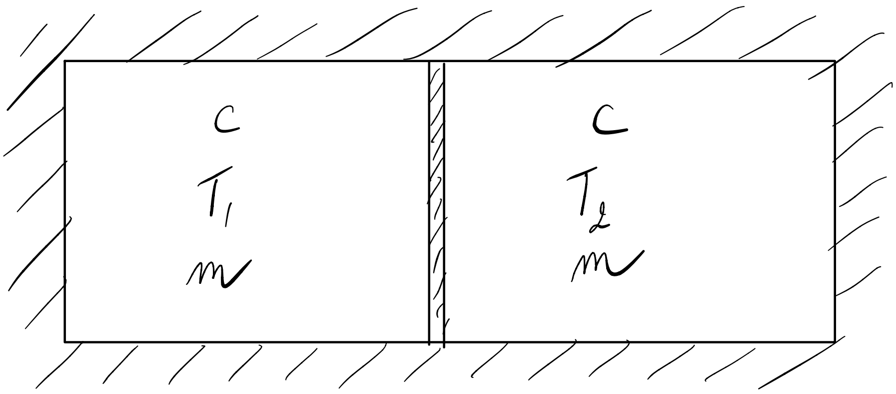
4 Contact thermique

On considère deux blocs identiques d'un même métal indéformable, de masse m, de chaleur spécifique massique c, placés chacun dans un compartiment dans une enceinte adiabatique. Les deux compartiments sont séparés par une cloison adiabatique. Initialement, les blocs sont à des températures différentes, notées T_1 et T_2 (on supposera $T_1 > T_2$). On retire la cloison et on laisse les blocs atteindre l'équilibre thermique.

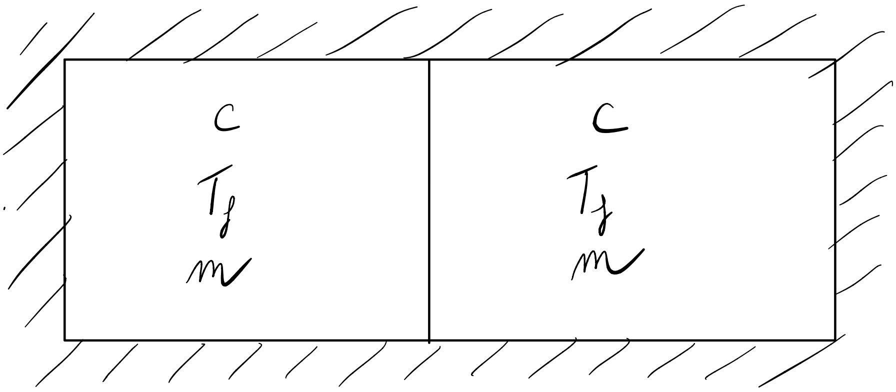
1. Faire un schéma qui illustre les états initial et final.
2. Calculer la température finale des blocs.
3. Calculer la variation d'entropie de chacun des blocs lors de cette transformation. Commenter leurs signes.
4. Calculer la variation d'entropie du système des deux blocs. Commenter son signe.

1

ÉTAT INITIAL.



ÉTAT FINAL.



2 Calcul de T_f = bilan énergétique (1er principe).

$$T_f(T_1, T_2) = \,?$$

$$\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2 = 0 \quad \text{(II)}$$ (le système $1 \cup 2$ est isolé).

$$\begin{cases} \Delta U_1 = Q_1 + \cancelto{0}{W_1} = Q_1 \\ \Delta U_2 = Q_2 + \cancelto{0}{W_2} = Q_2 \end{cases} \quad \text{(III)}$$

En substituant (III) dans (II) on trouve :

$$\Delta U = Q_1 + Q_2 = 0$$

soit $Q_1 + Q_2 = 0$. (IV)

On peut enfin relier Q_1 à (T_1, T_f) :

$$Q_1 = mc\,(T_f - T_1) \qquad (\text{V})a$$

et Q_2 à (T_2, T_f)

$$Q_2 = mc\,(T_f - T_2) \qquad (\text{V})b.$$

En substituant $(\text{V})a$ et $(\text{V})b$ dans (IV) :

$$Q_1 + Q_2 = mc\,(T_f - T_1) + mc\,(T_f - T_2) = 0.$$

On simplifie par mc :

$$T_f - T_1 + T_f - T_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2T_f = T_1 + T_2$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{T_f = \frac{T_1 + T_2}{2}}$$

③ Calcul de ΔS_1 et ΔS_2.

(Second principe : $\forall i \in [\![1, 2]\!]$, $dS_i = \delta S_i^r + \delta S_i^c$

où $\delta S_i^r = \frac{\delta Q}{T}$ et $\delta S_i^c = 0$ pour une transformation réversible).

On suppose, pour chaque bloc $i \in [\![1,2]\!]$, une transformation réversible menant de la température T_i à la température T_f : le long de cette transformation :

$$dS_i = \underbrace{\delta S_i^r}_{=\frac{\delta Q}{T}} + \underbrace{\delta S_i^c}_{=0 \text{ (réversible)}}$$

$$dS_i = \frac{\delta Q}{T}$$

où $dU_i = \delta Q + \underbrace{\delta W}_{=0} \Rightarrow dU_i = \delta Q = mc\,dT$

On trouve enfin : $dS_i = \frac{\delta Q}{T} = mc\frac{dT}{T}$.

En intégrant, $\Delta S_i = \int_{T_i}^{T_f} dS_i = \int_{T_i}^{T_f} mc\frac{dT}{T}$

soit encore $\Delta S_i = mc\int_{T_i}^{T_f}\frac{dT}{T} = mc\int_{T_i}^{T_f}\frac{1}{T}\,dT$

$$= mc\left[\ln T\right]_{T_i}^{T_f}$$

$\forall i \in [\![1,2]\!]$, $\boxed{\Delta S_i = mc\ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right)}$

$i = 1 \implies \Delta S_1 = mc \ln\left(\frac{T_f}{T_1}\right) = mc \ln\left(\frac{T_1+T_2}{2T_1}\right)$

$i = 2 \implies \Delta S_2 = mc \ln\left(\frac{T_f}{T_2}\right) = mc \ln\left(\frac{T_1+T_2}{2T_2}\right)$

<u>Commenter leurs signes :</u> $T_1 > T_2$

$T_1 > T_2$

$T_1 + T_2 > 2T_2$

$\frac{T_1+T_2}{2T_2} > 1$

$\ln\left(\frac{T_1+T_2}{2T_2}\right) > \ln 1 = 0$

$\implies \underbrace{\Delta S_2}_{\text{POSITIF}} > 0$

$T_1 > T_2$

$T_1 + T_1 > T_1 + T_2$

$1 > \frac{T_1+T_2}{2T_1}$

$0 = \ln 1 > \ln\left(\frac{T_1+T_2}{2T_1}\right)$

$\implies 0 > \underbrace{\Delta S_1}_{\text{NEGATIF}}$

(4) On utilise l'extensivité de l'entropie :

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2$$

$$= mc \ln\left(\frac{T_1+T_2}{2T_1}\right) + mc \ln\left(\frac{T_1+T_2}{2T_2}\right)$$

$$\Delta S = mc \ln\left[\underbrace{\frac{(T_1+T_2)^2}{4T_1T_2}}_{=x}\right]$$

SECOND PRINCIPE

$$\Delta S = \cancel{\delta^r} + \delta^c = \delta^c \geq 0.$$

Vérifions que $S^c \geq 0$.

$$\Delta S = S^c = mc \ln\left[\frac{(T_1+T_2)^2}{4T_1T_2}\right]$$

Or $\dfrac{(T_1+T_2)^2}{4T_1T_2} = \dfrac{\cancel{(T_2)^2}\left(\frac{T_1}{T_2}+1\right)^2}{\cancel{(T_2)^2} \times 4\,\frac{T_1}{T_2}}$

On pose $x = \frac{T_1}{T_2}$.

On trouve $\dfrac{\Delta S}{mc} = \ln\left[\dfrac{(1+x)^2}{4x}\right] = f(x)$

Étudions le signe de

$$f : x \longmapsto \ln\left[\frac{(1+x)^2}{4x}\right]$$

par montrer que $S^c \geq 0$.

$$(1-x)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2x + x^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2x + x^2 - 4x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (1+x)^2 - 4x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (1+x)^2 \geq 4x$$

Or $x = \frac{T_1}{T_2} > 0$, En divisant par $4x > 0$ on trouve

$$\frac{(1+x)^2}{4x} \geq 1$$

$$\Rightarrow \underbrace{\ln\left[\frac{(1+x)^2}{4x}\right]}_{= f(x)} \geq \ln 1 = 0$$

On a donc montré que

$$\forall x > 0, \quad f(x) = \frac{\Delta S}{mc} \geq 0.$$

Soit enfin $\Delta S = S^c \geq 0$.

Le second principe est donc vérifié.

(L'égalité est obtenue lorsque $x = 1$

cứ $\quad x = \dfrac{T_1}{T_2} = 0 \iff T_1 = T_2)$.