Coefficients thermoélastiques et équation d'état

L'étude expérimentale d'un gaz réel a permis de déterminer les coefficients thermoélastiques :

$$\alpha = \frac{3aT^3}{V} \text{ et } \chi_T = \frac{b}{V}.$$

Établir l'équation d'état du gaz.

Correction

La définition de α et χ_T permet d'écrire

$$A\left(T,P\right) \equiv \left.\frac{\partial V}{\partial T}\right|_P = 3aT^3 \quad \text{et} \quad B\left(T,P\right) \equiv \left.\frac{\partial V}{\partial P}\right|_T = -b.$$

Avant de continuer, il convient de vérifier que la différentielle sous-jacente est totale. Pour cela, on vérifie si la condition d'intégrabilité

$$\left.\frac{\partial A}{\partial P}\right|_T = \left.\frac{\partial B}{\partial T}\right|_P$$

est satisfaite.

On montre aisément que

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial A}{\partial P}\right|_T = 0, \\ \left.\dfrac{\partial B}{\partial T}\right|_P = 0 \end{cases}$$

et on en conclut que, d'après le lemme de Poincaré, la différentielle existe. En intégrant par rapport à T et P, on obtient respectivement

$$\begin{cases} V\left(T,P\right) = aT^4 + C_1\left(P\right), \\ V\left(T,P\right) = -bP + C_2\left(T\right). \end{cases}$$

En comparant les deux, on conclut que

$$V\left(T,P\right) = aT^4 - bP + C.$$