ENE-4202A – Examen blanc

14/01/2022

1 Schéma explicite d'Euler

1.1 Énoncé

Soit le problème de Cauchy suivant :

$$\forall t > 0, \quad y'(t) = t + y(t) \tag{1}$$

avec la condition initiale

$$y(0) = 1. \tag{2}$$

1. Trouver la solution exacte de ce problème.
2. Appliquer la méthode explicite d'Euler à ce problème, avec $\tau = 0.1$ puis évaluer la solution en $t = 0.3$. Comparer à la solution exacte.

1.2 Corrigé

1. On obtient la solution par la méthode de variation de la constante. Soit la solution homogène de l'équation -eq. 1

   $$y^h(t) = A\exp(t),$$

   on cherche une solution particulière de la forme

   $$y^p(t) = \exp(t)\, z(t).$$

   Après substitution dans eq. 1, on obtient

   $$z'(t) = t\exp(-t)$$

   et enfin

   $$z(t) = -(1+t)\exp(-t) + B.$$

   La solution s'écrit donc

   $$y(t) = A\exp(t) - t - 1.$$

   On utilise enfin la condition initial (eq. 2) pour déterminer A :

   $$y(t) = 2\exp(t) - t - 1.$$

2. On initialise le premier terme de la suite à $y_0 = y(0) = 1$. Le modèle est ici

$$f\colon\ (t, y) \mapsto t + y$$

et schéma explicite d'Euler définit donc la récurrence suivante

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \tau f(t_n, y_n), \\ &= y_n + \tau(t_n + y_n), \\ &= (1 + \tau) y_n + \tau t_n. \end{aligned}$$

Il suffit donc d'appliquer cette formule trois fois pour trouver

$$y_1 = (1 + \tau) y_0 + \tau t_0 = 1.1 \times 1 + 0 \times 0.1^2 = 1.1,$$

$$y_2 = (1 + \tau) y_1 + \tau t_1 = 1.1 \times 1.1 + 1 \times 0.1^2 = 1.22,$$

$$y_3 = (1 + \tau) y_2 + \tau t_2 = 1.1 \times 1.22 + 2 \times 0.1^2 = 1.362,$$

On peut enfin comparer ces valeurs à la solution exacte :

$$y(t_1) - y_1 \simeq 1.110 - 1.1 = 0.010,$$

$$y(t_2) - y_2 \simeq 1.243 - 1.22 = 0.023,$$

$$y(t_3) - y_3 \simeq 1.400 - 1.362 \simeq 0.038.$$

Bonus : ci-dessous un petit script Julia pour répondre à la dernière question.

```
using Base.Iterators

exact(t) = 2exp(t) - t - 1

T = 0.:0.1:0.3
Z = exact.(T)

Y = [first(Z)]
for t in T[1:end - 1]
    push!(Y, (1 + step(T)) * last(Y) + step(T) * t)
end

Z .- Y
```

2 Programmation en `julia`

2.1 Énoncé

L'équation de Blasius décrit l'évolution de la couche limite sur une plaque plane en l'absence de gradient de pression. Elle s'écrit

$$\dddot{y} + \ddot{y} y = 0.$$

1. Quel est l'ordre de cette équation ?
2. La réécrire sous la forme d'un système d'équations différentielles ordinaires d'ordre 1.

   Indication : introduire $\vec{q}\colon \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^3$ tel que $q_1 = y$, $q_2 = \dot{y}$, $q_3 = \ddot{y}$ puis exprimer $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$ et $\dot{q}_3$ en fonction de q_1, q_2 et q_3.

3. Écrire la fonction `julia` correspondant à ce système.

   Indication : on pourra s'inspirer du cas du système de Lorenz

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma\,(y - x)\,, \\ \dot{y} = x\,(\rho - z) - y, \\ \dot{z} = xy - \beta z \end{cases}$$

   avec $\sigma = 10$, $\beta = {}^8\!/_3$ et $\rho = 28$, pour lequel la fonction s'écrira

```
lorenz(x, y, z) = 10 * (y - x), x * (28 - z) - y, x * y - 8 * z / 3
```

2.2 Corrigé

1. Il s'agit d'une équation différentielle ordinaire d'ordre 3.
2. En posant $q_1 = y$, $q_2 = \dot{y}$ et $q_3 = \ddot{y}$, on trouve

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = q_2, \\ \dot{q}_2 = q_3, \\ \dot{q}_3 = -q_1 q_3. \end{cases}$$

3. On en déduit le code suivant.

```
blasius(x, y, z) = y, z, -x * z
```

3 L'équation logistique

L'équation différentielle suivante régit l'évolution d'une population avec un taux de croissance $\alpha > 0$ en présence d'un mécanisme la faisant tendre vers $\kappa > 0$ dans la limite $t \to \infty$:

$$\begin{cases} \dot{y}\,(t) = \alpha y\,(t) \left[1 - \dfrac{y\,(t)}{\kappa}\right], \quad t > 0, \\ y\,(0) = y_0. \end{cases}$$

1. Montrer que la solution du système précédent est

$$\forall t > 0, \quad y\,(t) = \frac{\kappa}{1 + \frac{\kappa - y_0}{y_0}\exp\left(-\alpha t\right)}.$$

Les paramètres du système prennent les valeurs suivantes : $\alpha = 1$, $\kappa = 2$ et $y_0 = 1$.

2. Appliquer le schéma explicite d'Euler à ce problème, en prenant comme pas de temps $\tau = 0.1$. On évaluera la solution numérique en $t = 0.3$.
3. Comparer la solution numérique à la solution exacte.

4 Différences finies et condition limite

On souhaite obtenir une formule différences finies pour la dérivée d'une fonction f en un point x_j. On souhaite utiliser les valeurs f_{j-2}, f_{j-1} et f_j aux points x_{j-2}, x_{j-1} et x_j, respectivement. On note que cette approche est couramment utilisée pour le traitement numérique de conditions aux limites.

La généralisation de la formule du coefficient directeur s'écrira alors

$$f_j' = \alpha f_j + \beta f_{j-1} + \gamma f_{j-2} + \mathcal{O}\left(h^p\right).$$

L'objectif est donc de déterminer α, β et γ afin d'obtenir la formule d'ordre p le plus élevé possible.

1. Effectuer un développement limité de f_{j-1} et f_{j-2} d'ordre 3 au voisinage de x_j.
2. Substituer ces expressions dans la formule des différences finies, et en déduire un système de 3 équations pour les 3 inconnues α, β et γ.
3. Résoudre ce système.
4. En déduire la formule des différences finies. Identifier l'ordre de la méthode, ainsi que l'erreur de troncature.